Matemática A | **10.º ano** Belmiro Costa · Ermelinda Rodrigues · Lara Martins Rodrigues

Caderno de Atividades

Pratica+

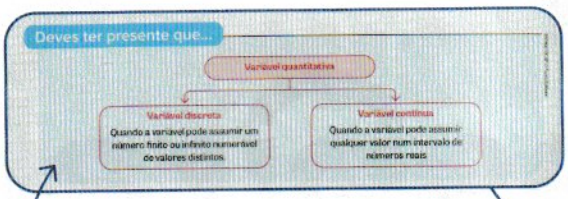
espiral

10

Porto Editora

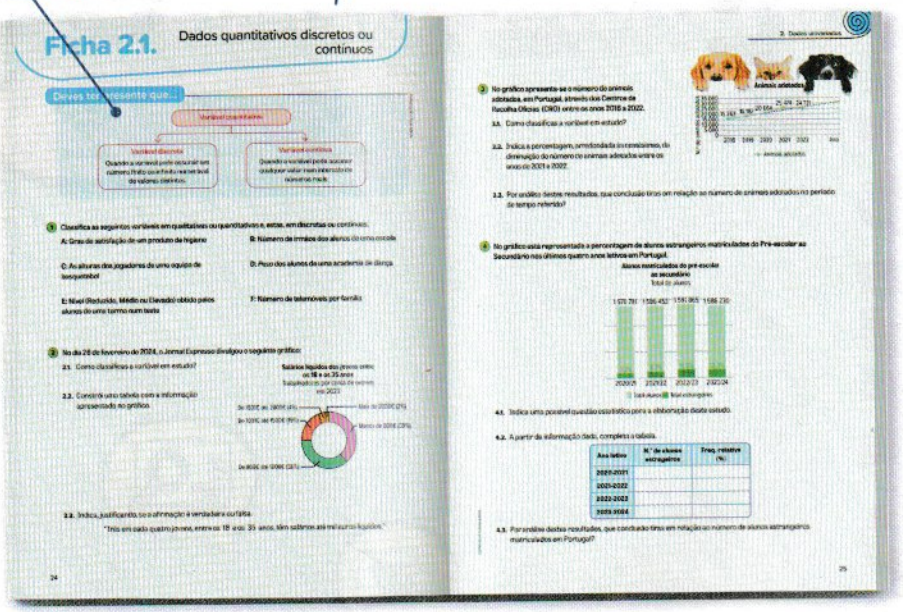
Apresentação

Pratica +



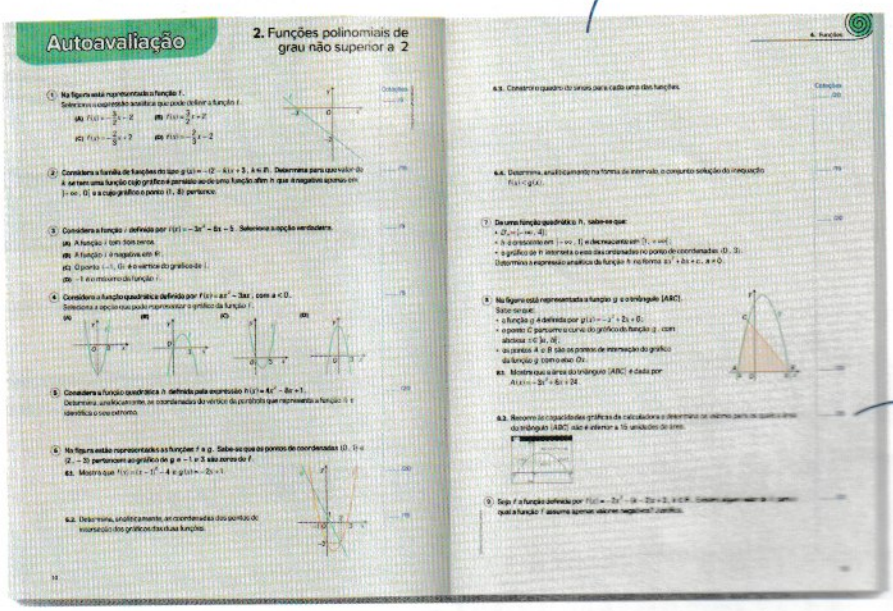
Todas se iniciam com um resumo sucinto dos conteúdos a abordar na ficha

Fichas organizadas de acordo com **subtemas** do manual



Avalia +

Fichas de autoavaliação de acordo com os **temas** do manual



Com sugestão de cotação

ISBN 978-972-0-42521-8

Índice

Pratica +

1 Modelos Matemáticos para a Cidadania

1. Modelos matemáticos nas eleições
- **1.1.** Linguagem das eleições 4
- **1.2.** Maioria simples e maioria absoluta 6
- **1.3.** Método de Borda 8

2. Modelos matemáticos na partilha
- **2.1.** Método de Hondt 10
- **2.2.** Método de St. Laguë 12

3. Modelos matemáticos em finanças
- **3.1.** Matemática nos salários 14
- **3.2.** Matemática na poupança e no crédito 18

2 Estatística

1. Problema estatístico
- **1.1.** Problema estatístico 20
- **1.2.** Fases de um estudo estatístico 22

2. Dados univariados
- **2.1.** Dados quantitativos discretos ou contínuos 24
- **2.2.** Organização de dados 26
- **2.3.** Medidas de localização 30
- **2.4.** Medidas de dispersão 36

3. Dados bivariados
- **3.1.** Dados quantitativos. Diagrama de dispersão 40
- **3.2.** Reta de regressão 42

3 Geometria sintética no plano

1. Pontos notáveis do triângulo. Reta de Euler e circunferência dos nove pontos
- **1.1.** Incentro de um triângulo 44
- **1.2.** Circuncentro de um triângulo 46
- **1.3.** Ortocentro de um triângulo 48
- **1.4.** Baricentro de um triângulo 50
- **1.5.** Reta de Euler 52
- **1.6.** Circunferência dos nove pontos 54

4 Funções

1. Generalidades acerca de funções
- **1.1.** Funções e representações 56
- **1.2.** Funções: alguns conceitos 58

2. Funções polinomiais de grau não superior a 2
- **2.1.** Função afim 60
- **2.2.** Função quadrática: transformações geométricas 62
- **2.3.** Equações e inequações do 2.º grau 66

3. Funções definidas por ramos
- **3.1.** Funções definidas por ramos: definição analítica 68
- **3.2.** Estudo de funções definidas por ramos 70
- **3.3.** Função módulo: definição analítica 72

5 Geometria analítica no plano e no espaço

1. Geometria analítica no plano
- **1.1.** Referenciais cartesianos no plano 74
- **1.2.** Distância entre dois pontos no plano 76
- **1.3.** Conjuntos de pontos do plano definidos por condições 78

2. Geometria analítica no espaço
- **2.1.** Referenciais cartesianos no espaço 82
- **2.2.** Distância entre dois pontos no espaço 84
- **2.3.** Conjuntos de pontos do espaço definidos por condições 86

6 Vetores no plano e no espaço

1. Vetores no plano e no espaço
- **1.1. e 1.2.** Vetor no plano e no espaço. Soma de um ponto com um vetor 90
- **1.3.** Operações com vetores 93

2. Coordenadas de um vetor num referencial ortonormado
- **2.1.** Coordenadas de um vetor 96
- **2.2.** Operações com coordenadas de vetores 98
- **2.3. e 2.4.** Coordenadas do vetor definido por dois pontos e da soma de um ponto com um vetor 100
- **2.5.** Norma de um vetor a partir das coordenadas 102
- **2.6.** Equação vetorial da reta 104
- **2.7.** Equação reduzida da reta (no plano) 106

Soluções 108

Avalia +

1 Modelos Matemáticos para a Cidadania 2

2 Estatística 6

3 Geometria sintética no plano 10

4 Funções 12

5 Geometria analítica no plano e no espaço 18

6 Vetores no plano e no espaço 22

Soluções 26

Ficha 1.1. Linguagem das eleições

Deves ter presente que...

- Um **voto branco** corresponde a um boletim em que nada foi assinalado.
- Um **voto nulo** é um voto não válido, por ter, por exemplo, mais do que uma opção assinalada, por haver alguma dúvida sobre qual a opção escolhida, por estar rasurado ou apresentar algo desenhado ou escrito indevidamente.
- Os votos que não são brancos nem nulos dizem-se **validamente expressos** (válidos).
- A **abstenção** é a diferença entre o número de pessoas que poderiam ter votado (eleitores) e os que efetivamente votaram (votantes).

1 **Nas eleições autárquicas de 2021 para a Câmara Municipal de Vila Nova de Famalicão, no distrito de Braga, os resultados foram os seguintes:**

Partidos	N.° de votos
PPD/PSD.CDS-PP	40 143
PS	24 409
CH	2 143
PCP-PEV	1 835
IL	1 762
B.E.	1 423
PAN	1 214

ELEIÇÕES AUTÁRQUICAS 2021
26 DE SETEMBRO

N.° de eleitores inscritos: 119 499
N.° de votos brancos: 2074
N.° de votos nulos: 906

Fonte: Área Eleitoral da Secretaria-Geral do Ministério da Administração Interna

1.1. Calcula, apresentando o resultado arredondado às centésimas, a percentagem de:

a) votos validamente expressos;

b) abstenção nestas eleições;

c) votos obtidos pelo partido menos votado.

1.2. Qual foi o partido mais votado? Este resultado foi do agrado da maior parte dos votantes? Justifica.

ESPAÇO DCAP © Porto Editora

2 **Num determinado país, realizaram-se eleições presidenciais, havendo cinco candidatos e 252 363 eleitores inscritos. Os resultados foram os seguintes:**

Candidatos	A	B	C	D	E	N.° de votos brancos: 6873 N.° de votos nulos: 7441 N.° de eleitores que não votaram: 45 394
N.° de votos		68 978	42 778	56 955		
Percentagem de votos válidos					6%	

2.1. Calcula o número de votantes.

2.2. Determina a percentagem de abstenção nestas eleições, arredondada às décimas.

2.3. Completa a tabela, começando por indicar o número de votos validamente expressos.

Candidatos	A	B	C	D	E
N.° de votos		68 978	42 778	56 955	
Percentagem de votos válidos					6%

2.4. Identifica o candidato mais votado.

3 **Os sócios de um clube desportivo elegeram o Presidente da Direção. Os votos dos sócios não são contabilizados todos da mesma forma, pois depende de alguns fatores, nomeadamente, da antiguidade como sócios (sócios mais antigos têm direito a mais votos do que os mais recentes). Sabe-se que dos 40 115 sócios eleitores, apenas 40 085 é que realmente votaram, perfazendo um total de 808 298 votos. Os resultados foram:**

Candidatos	Lista A	Lista B	Branco	Nulos
N.° de associados que votaram	33754	5043	1071	217
Percentagem de votos	84,48%	12,24%	2,72%	0,56%

3.1. Determina a percentagem de abstenção, arredondada às centésimas.

3.2. Determina o valor arredondado às centésimas da percentagem de associados cujo voto não foi validamente expresso.

3.3. Determina o número de votos de cada uma das listas.

ESPMA10CAP © Porto Editora

Ficha 1.2. Maioria simples e maioria absoluta

Deves ter presente que...

- **Maioria simples** (ou **relativa**): o vencedor é o candidato mais votado, independentemente da percentagem de votos recebidos.
- **Maioria absoluta** (ou **sistema maioritário de duas voltas**): o vencedor tem de ter mais de metade do número de **votos válidos**. Se isso não acontecer, realiza-se uma segunda volta com os **dois candidatos mais votados**, ganhando quem obtiver a maioria dos votos.

ESPMA10CAP © Porto Editora

1 Identifica, para cada uma das situações, o candidato vencedor por maioria simples e verifica se venceu também com maioria absoluta.

1.1.

Candidatos	A	B	C
N.º de votos	135	40	170

1.2.

Candidatos	A	B	C	D
N.º de votos	62	175	58	53

2 Considera os seguintes resultados de um processo eleitoral cujo sistema é o de maioria absoluta.

Candidatos	A	B	C
N.º de votos	102	65	89

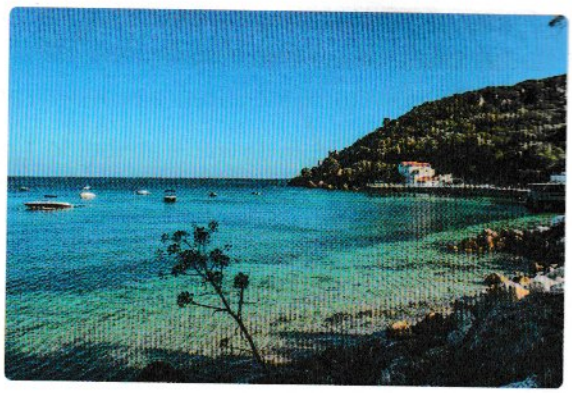
2.1. Justifica que é necessária uma segunda volta.

2.2. Admite que 20% dos votos do candidato excluído na primeira volta transitam para o mais votado e os restantes para o outro candidato.

a) Qual seria o candidato vencedor?

b) O que podes concluir relativamente aos métodos eleitorais de maioria simples e de maioria absoluta nesta situação?

3 **Numa escola realizou-se uma votação para selecionar o destino para a viagem de finalistas do 9.º ano, de entre três opções: S. Martinho do Porto, Setúbal e Albufeira. Apenas votaram uma parte dos 175 alunos finalistas, tendo-se registado 12% de abstenção. Sabe-se que 42 votos foram considerados não válidos.**



3.1. Quantos foram os votos validamente expressos?

3.2. Sabe-se que o número de votos nulos e de votos brancos estão na proporção 4 para 3. Determina a percentagem de votos brancos e a de votos nulos, apresentando o resultado arredondado às unidades.

3.3. Quantos votos obteve o destino Albufeira, sabendo que $\frac{1}{4}$ dos votos validamente expressos recaíram sobre o destino S. Martinho do Porto e 75% dos restantes escolheram Setúbal?

3.4. O destino mais votado obteve maioria absoluta?

4 **Para escolher a Associação de Estudantes de uma escola, foi organizado um processo eleitoral, no qual os 920 alunos poderiam votar numa das três listas criadas para o efeito. Verificou-se uma taxa de abstenção de 25% e, de entre os votos efetuados, houve 50 considerados inválidos. Sabe-se, ainda, que a lista A recebeu $\frac{1}{4}$ dos votos validamente expressos e a lista B recebeu $\frac{5}{3}$ dos votos da lista C.**

4.1. Determina o número de votos que cada uma das listas obteve.

4.2. Identifica a lista vencedora e justifica que não ganhou com maioria absoluta.

4.3. Sabe-se que 48% dos votos inválidos foram votos brancos. Se os alunos que votaram em branco tivessem votado na lista com mais votos, esta venceria com maioria absoluta? Justifica.

ESPMATH AP © Porto Editora

Ficha 1.3. Método de Borda

Deves ter presente que...

Após os eleitores indicarem a ordem de preferência dos candidatos, procede-se da seguinte forma:

- em cada boletim de voto **é atribuído 1 ponto ao candidato menos votado, 2 pontos ao penúltimo, 3 pontos ao antepenúltimo** e assim sucessivamente, até serem considerados todos os candidatos;
- são somados os pontos de cada um dos candidatos;
- vence o candidato que obtiver a maior pontuação.

ESPMA10CAP © Porto Editora

1 Aplica o método de Borda para apurar o vencedor de cada uma das votações em que existem três candidatos: A, B e C.

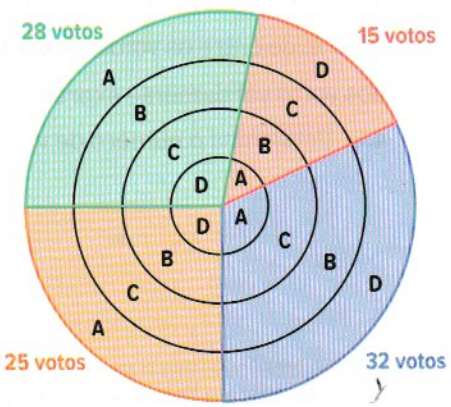
1.1.

Ordem de preferência	N.º de votos		
	7	5	9
1.ª	C	A	B
2.ª	A	C	A
3.ª	B	B	C

1.2.

Ordem de preferência	N.º de votos			
	10	12	8	15
1.ª	B	C	A	C
2.ª	A	B	B	A
3.ª	C	A	C	B

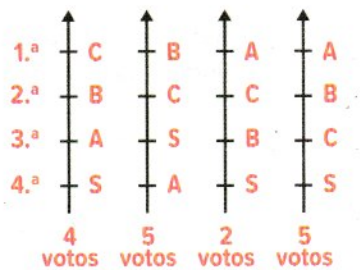
2 O esquema circular ao lado representa o resultado de uma votação preferencial para o melhor jogador de uma equipa de futsal: A, B, C ou D. As sequências estão indicadas por ordem decrescente de preferência: do centro para o exterior, estando as 1.as preferências no círculo menor.



2.1. Prova que o vencedor, pelo método de Borda, não é o jogador preferido dos votantes.

2.2. Se considerares apenas as primeiras preferências, qual é o vencedor por maioria simples?

3 Um grupo de dezasseis amigos pretendem provar o famoso arroz de sarrabulho à moda de Ponte de Lima, num dos seguintes restaurantes: Confrinha (C), Açudinho (A), Brasinhas (B) ou Sabores (S). Como havia diferentes opiniões, decidiram fazer uma votação preferencial. Os resultados foram os representados no esquema ao lado.



3.1. Utilizando o método de Borda, qual foi o restaurante escolhido?

3.2. Se considerares apenas as primeiras preferências, o restaurante mais votado obteve maioria absoluta? Justifica.

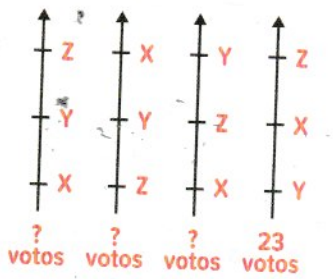
4 **A Beatriz (B), a Luana (L) e o Valentim (V) participaram no concurso para eleger a melhor máscara na festa de Carnaval da aldeia onde residem. Cada uma das pessoas que constituem a equipa organizadora da festa votaram, colocando os três finalistas por ordem de preferência. Os resultados foram os apresentados na tabela.**

Ordem de preferência	N.º de votos			
	5	6	9	?
1.ª	B	V	L	B
2.ª	V	L	V	L
3.ª	L	B	B	V

4.1. Sabendo que a Luana foi a vencedora, pelo método de Borda, obtendo uma pontuação de 54 pontos, determina o número de pessoas que votaram BLV.

4.2. Se o método utilizado fosse o de maioria simples, qual seria o vencedor? E por maioria absoluta com duas voltas?

5 **Foi realizada uma votação com três candidatos (X, Y e Z) usando boletins de preferência. Obtiveram-se os resultados indicados no esquema ao lado.**



Sabe-se que:

- o número de pessoas que votaram XYZ foi a terça parte do número de pessoas que votaram ZYX;
- o número de pessoas que votaram YZX foi o dobro do número de pessoas que votaram XYZ;
- ao aplicar o método de Borda, o candidato Y obteve 149 pontos.

Determina os valores em falta no esquema apresentado.

Ficha 2.1.

Método de Hont

Deves ter presente que...

Procedimento: Para se distribuir n mandatos por um determinado número de partidos (ou listas):

1.ª etapa: Dividem-se os votos de cada partido (ou lista) por: 1, 2, 3, 4,...

2.ª etapa: Ordenam-se os quocientes obtidos por ordem decrescente.

3.ª etapa: Selecionam-se os n maiores quocientes, determinando-se o número de mandatos a atribuir a cada partido (ou lista).

Nota: No caso de haver apenas um mandato por distribuir e os quocientes da série seguinte serem iguais e de partidos (ou listas) diferentes, o mandato é atribuído ao partido (ou lista) menos votado.

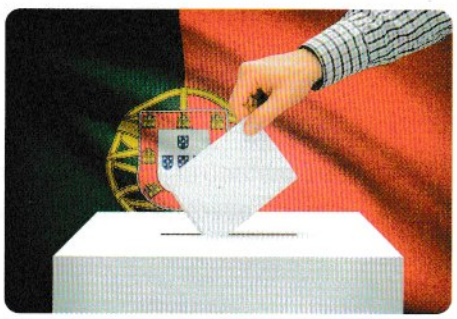
ESPMA10CAP © Porto Editora

1 **Nas eleições autárquicas de 2021 para eleger a Assembleia de Freguesia de Vale S. Martinho, no concelho de Vila Nova de Famalicão, distrito de Braga, obtiveram-se os seguintes votos, nos partidos/coligações concorrentes.**

Partidos	N.º de votos
PPD/PSD.CDS-PP	625
PS	477
PCP-PEV	31

N.º de inscritos: 1831
N.º de votos brancos: 20
N.º de votos nulos: 16

Fonte: Área Eleitoral da Secretaria-Geral do Ministério da Administração Interna



1.1. Determina, arredondado às unidades, a percentagem de:

a) abstenção;

b) votos não validamente expressos.

1.2. Sabendo que havia nove mandatos para atribuir na referida Assembleia de Freguesia, aplica o método de Hondt para determinar o número de mandatos atribuídos a cada partido concorrente.

1.3. Qual é o número mínimo de votos que faltaram ao partido PCP-PEV para que este tivesse obtido um mandato? Justifica.

1.4. Se os eleitores correspondentes aos votos nulos ou brancos votassem no partido PCP-PEV, este conseguiria algum mandato? Justifica.

ESPMA10CAP © Porto Editora

1.5. Completa a seguinte tabela e compara as percentagens de votos válidos e de mandatos de cada partido. O que observas?

Partidos	N.º de votos	Percentagem de votos válidos	N.º de mandatos	Percentagem de mandatos
PPD/PSD. CDS-PP				
PS				
PCP-PEV				

2 **Uma empresa tem quatro fábricas em diferentes localidades do país: V. N. de Famalicão (F), Guimarães (G), Aveiro (A) e Lisboa (L). Como a empresa está-se a envolver em mais projetos, a Direção decidiu contratar sete novos funcionários para reforçar o grupo de trabalhadores da empresa, proporcionalmente ao número de funcionários de cada fábrica. Os funcionários estão distribuídos pelas quatro fábricas da seguinte forma:**

2.1. Usando o método de Hondt, determina quantos novos funcionários deverão ser atribuídos a cada uma das fábricas.

Fábricas	F	G	A	L
N.º de funcionários	450	225	550	722

2.2. Explica como procedeste para atribuir o último funcionário na alínea anterior.

3 **Em determinadas eleições, em relação às quais há seis mandatos para distribuir, candidataram-se três partidos políticos. Registou-se 20% de abstenção e os resultados eleitorais foram os seguintes:**

Partidos	X	Y	Z	N.º de votos nulos: 235 N.º de votos brancos: 173
N.º de votos	7238	?	1672	

3.1. Sabe-se que o partido Z não teve direito a mandato. Determina o número mínimo de votos do partido Y.

3.2. Sabe-se que o partido Y obteve 3402 votos. Se os abstencionistas tivessem votado no partido menos votado, a distribuição dos mandatos seria alterada?

ESPMAT10AP © Porto Editora

Ficha 2.2.

Método de St. Laguë

Deves ter presente que...

Procedimento: Para se distribuir n mandatos por um determinado número de partidos (ou listas):

1.ª etapa: Dividem-se os votos de cada partido (ou lista) por 1, 3, 5,...

2.ª etapa: Ordenam-se os quocientes obtidos por ordem decrescente.

3.ª etapa: Selecionam-se os n maiores quocientes, determinando-se o número de mandatos a atribuir a cada partido (ou lista).

Nota: No caso de haver apenas um mandato por distribuir e os quocientes da série seguinte serem iguais e de partidos (ou listas) diferentes, o mandato é atribuído ao partido (ou lista) menos votado.

ESPMA10CAP © Porto Editora

1 **Nas eleições autárquicas de 2021, para eleger os representantes da Assembleia de Freguesia de Roriz, no concelho de Santo Tirso, distrito do Porto, obtiveram-se os seguintes votos nos partidos/coligações concorrentes:**

Partidos	PS	PPD/PSD.CDS-PP	PCP-PEV	N.° de inscritos: 3160 N.° de votos brancos: 46 N.° de votos nulos: 27
N.° de votos	1109	563	227	

Fonte: Área Eleitoral da Secretaria-Geral do Ministério da Administração Interna

1.1. Sabendo que havia nove mandatos para atribuir na referida Assembleia de Freguesia, determina o número de mandatos atribuídos a cada partido concorrente por aplicação do:

a) método de Hondt;

b) método de St. Laguë.

1.2. O que observas na aplicação dos dois métodos?

1.3. Se a terça parte dos abstencionistas tivessem votado no partido/coligação menos votado, o número de mandatos de cada partido/coligação concorrente iria alterar por aplicação do método de St. Laguë? Justifica.

ESPMA10CAP © Porto Editora

2 Observa os resultados de uma eleição aos quais se aplicou o método de St. Laguë para distribuir sete mandatos. Contudo, a tabela encontra-se incompleta. Sabe-se que o partido Z foi o menos votado. Indica o número mínimo de votos que terá obtido sabendo que conseguiu um mandato.

Partidos	X	Y	Z
N.º de votos	12570	8415	?

3 Um grupo de oito alunos das escolas A, B, C e D de um agrupamento serão selecionadas para representá-lo no parlamento dos jovens. Determina o número de alunos a selecionar em cada escola para fazer parte do grupo por aplicação dos métodos de Hondt e de St. Laguë. Que diferenças verificas em relação aos resultados obtidos por aplicação dos dois métodos?

Escolas	A	B	C	D
N.º de alunos	1230	1010	930	800

4 Num processo eleitoral concorreram os partidos A, B, C e D. Sabe-se que havia 4000 eleitores inscritos e registou-se 19% de abstenção. Os resultados eleitorais foram:

Partidos	A	B	C	D	N.º de votos brancos: 187 N.º de votos nulos: 101
N.º de votos	1235	953	?	354	

4.1. Determina o número de votantes, o número de eleitores que não participaram no ato eleitoral e o número de votos obtidos pelo partido C.

4.2. Aplica o método de St. Laguë para distribuir sete mandatos pelos partidos candidatos. Indica o número de representantes que terá cada um dos partidos.

ESPMATOA © Porto Editora

Ficha 3.1. Matemática nos salários

Deves ter presente que...

- O **salário bruto**, **base** ou **ilíquido** corresponde ao valor total que o empregador contratualiza pagar a um trabalhador. Sobre esta remuneração bruta incidem os descontos obrigatórios: sistema de **Segurança Social** e **IRS** (Imposto sobre o Rendimento das Pessoas Singulares).
- O **salário líquido** é o valor que o trabalhador efetivamente recebe.
- **Remuneração anual** $= 14 \times$ Remuneração **mensal**
- **Salário por hora:** $\frac{R_{\text{mensal}} \times 12}{52 \times n}$, sendo n o n.º de horas de trabalho semanal
- **Rendimento coletável** é o rendimento anual bruto subtraído das deduções específicas.
- O IRS é um **imposto progressivo**: quanto maior for o rendimento coletável de um contribuinte, maior será o valor do IRS que terá de pagar, sendo crescentes as taxas aplicadas.

ESPMA10CAP © Porto Editora

1 A Andreia tem um salário bruto mensal de 1204,86 €. Sabe-se que, ao salário bruto, foram aplicados os seguintes descontos: 11% de Segurança Social e 14,6% de IRS. Sabendo que não foram aplicados mais descontos nem recebeu abonos extra, calcula o valor total de descontos mensais e o salário líquido mensal da Andreia.

2 Qual é o valor de cada hora de trabalho de um funcionário que cumpre 35 horas semanais e aufere um vencimento:

2.1. mensal de 1450 €;

2.2. anual de 20 370 €.

3 Um trabalhador ganha 5,31 € por hora e trabalha 40 horas por semana. Calcula o seu:

3.1. salário mensal;

3.2. salário anual.

4 A Catarina tem um vencimento bruto mensal de 1173 €. Num determinado mês, o seu salário bruto foi acrescido de 293,20 € de horas extras. Sabe-se que o total de descontos efetuados corresponde a 28,3% da soma do seu salário bruto com o valor total das horas extras.

4.1. Determina o salário líquido da Catarina nesse mês.

4.2. Calcula a diferença entre a situação de o valor das horas extras estar isento de quaisquer impostos e a situação de não estar. O que observas?

5 **O salário líquido do Nuno, num determinado mês, foi 1105,46 € . Nesse mês, a percentagem total de descontos efetuados foi 25,14% . Determina o salário bruto do Nuno nesse mês.**

6 **Observa parte da tabela remuneratória da administração pública relativa ao ano de 2024 e disponibilizada pela DGAEP (Direção-Geral da Administração e do Emprego Público).**

A Sara tem funções administrativas na Câmara Municipal de uma determinada cidade, cumprindo um horário de 35 horas semanais e, em 2024, o seu nível remuneratório era o 10 .

6.1. Determina o:

a) salário anual bruto da Sara;

b) salário bruto da Sara por hora de trabalho.

6.2. Determina a percentagem de aumento da base remuneratória da Administração Pública (BRAP) de 2023 para 2024 (a) da tabela) sabendo que em 2023 era 769,20 € . Apresenta o resultado arredondado às décimas.

Nível remuneratório	Valor atual do montante pecuniário (€)
1	a)
2	a)
3	a)
4	a)
5	821,86 €
6	869,84 €
7	922,47 €
8	961,40 €
9	1017,56 €
10	1070,19 €
11	1122,84 €
12	1175,46 €
13	1228,09 €
14	1280,72 €
15	1333,35 €

Notas: Atualizada nos termos do Decreto-Lei n.º 108/2023, 22 de novembro.
a) – Base Remuneratória da Administração Pública (BRAP em 2024 = 821,86 €)

7 **A Eva ganha 9,20 € por hora e o Marco tem um salário anual de 20 412 € . Sabe-se que a Eva e o Marco trabalham, respetivamente, 40 e 35 horas por semana.**

7.1. Determina o salário anual da Eva.

7.2. Calcula o valor de cada hora de trabalho do Marco.

8 **A Flávia aufere um salário bruto mensal 1151 € , correspondente a 35 horas de trabalho semanal.**

Determina o:

8.1. salário bruto anual da Flávia;

8.2. salário bruto por hora da Flávia.

ESPMAT.DCAP © Porto Editora

ESPMA10CAP © Porto Editora

8.3. Num certo mês, a Flávia precisou de trabalhar mais uma hora por dia durante oito dias. Sabendo que essas horas extras serão pagas pelo valor do salário bruto por hora, acrescido de 35% desse valor, determina o salário bruto total da Flávia nesse mês.

8.4. Sabe-se que a Flávia recebe 5,70 € de subsídio de refeição por cada dia de trabalho efetivo, isentos de quaisquer impostos. Num determinado mês, a Flávia trabalhou 22 dias e o total de descontos efetuados corresponde a 30,04% do seu salário bruto. Qual foi o salário líquido da Flávia nesse mês?

9 **A Sónia desconta, mensalmente, 158,90 € para a Segurança Social.**

9.1. Determina o salário bruto mensal da Sónia.

9.2. Determina a contribuição da empresa relativa à sua funcionária.

9.3. Sabe-se, também, que ao salário bruto são descontados 16,2% de IRS e 3,5% de ADSE. Num determinado mês, recebeu 5,20 € de subsídio de refeição por dia, isentos de impostos (foram considerados 18 dias de trabalho nesse mês).

Calcula o valor do salário líquido da Sónia nesse mês.

9.4. A Sónia foi aumentada e o valor da contribuição mensal para a Segurança Social passou para 174,79 €. Determina a:

a) percentagem do aumento verificado no salário bruto mensal da Sónia;

b) contribuição da empresa relativa à sua funcionária após o aumento.

10 **O Miguel vive em Lisboa, é casado (dois titulares de rendimentos) e tem duas filhas menores. A retenção na fonte do Miguel no mês de janeiro de 2024 foi 45,60 €, sendo-lhe aplicada uma taxa marginal máxima de 23%.**

10.1. Atendendo às condições do Miguel e aos dados da tabela, calcula o salário bruto do Miguel, nesse mês.

Remuneração mensal (€)		Taxa marginal máxima	Parcela a abater (€)	Parcela adicional a abater por dependente (€)
Até	1574,66	0,00%	0,00	0,00
Até	1648,29	13,25%	208,64	21,43
Até	1994,61	23,00%	369,35	21,43
Até	2410,71	32,75%	563,83	21,43
Até	4373,75	37,00%	666,29	21,43
...		...	...	...

Fonte: Diário da República, 29 de dezembro de 2023

Fórmula a aplicar:
Remuneração × Taxa − Parcela a abater − Parcela adicional a abater × n.º de dependentes.
R = Remuneração mensal

10.2. Em março de 2024, o salário bruto do Miguel teve um aumento de 6%. Determina, nesse mês, qual foi o montante relativo à retenção na fonte de IRS.

11 **O rendimento coletável da Stephanie foi 28 572,20 € e as deduções específicas declaradas para o IRS foram 4845,58 €. Sabendo que os seus rendimentos resultaram apenas do seu salário e que este não sofreu alterações ao longo do ano, calcula o valor de cada hora de trabalho, trabalhando 35 horas por semana.**

12 **Considera dois trabalhadores com os seguintes rendimentos coletáveis relativos a 2023:**
Trabalhador A: 18 953,75 €
Trabalhador B: 13 495,50 €
Consulta a tabela da página 63 do manual relativa aos escalões de IRS praticados em Portugal, em 2023.
Determina a diferença entre o IRS do trabalhador A e o IRS do trabalhador B.
O que observas?

13 **Na figura encontra-se parte do recibo de vencimento da Lurdes, relativo a um determinado mês de trabalho, mas encontra-se incompleto.**

RECIBO DE VENCIMENTO **ORIGINAL**

Lurdes Oliveira
N.º de Contribuinte 00000
N.º de Beneficiário 00000
Período: 2024-01-01 a 2024-01-31

Descrição	Taxa	Valor €
VENCIMENTO-BASE		*a*
SEGURANÇA SOCIAL	11%	180,40
IRS	*b*	217,30
SUBSÍDIO DE ALIMENTAÇÃO		*c*
Total líquido		*d* EUR

A Lurdes, no mês a que se refere o recibo, trabalhou 22 dias úteis e recebeu 5,80 € de subsídio de alimentação por cada dia de trabalho, isentos de quaisquer impostos. Determina os valores de *a*, *b*, *c* e *d* assinalados no recibo de vencimento da Lurdes.

ESPMA10CAP © Porto Editora

Ficha 3.2.

Matemática na poupança e no crédito

Deves ter presente que...

Sendo:

C_i: Capital inicial investido

n: Número de períodos de capitalização

r: Taxa em cada período de capitalização

- **Juros simples:** $C_n = C_i(1 + nr)$
- **Juros compostos:** $C_n = C_i(1 + r)^n$

ESPMA10CAP © Porto Editora

1 **A Marta subscreveu uma aplicação financeira que lhe garante um juro de 1,2% ao fim de um ano. Determina o capital final obtido pela Marta, se o montante for:**

1.1. 2500 €

1.2. 5750 €

2 **O José aplicou 20 000 € num depósito a prazo do seu banco e, ao fim de um ano, passou a ter 20 600 €. Qual foi:**

2.1. o juro recebido?

2.2. a taxa de juro, em percentagem?

3 **A Maria aplicou uma certa quantia, em euros, num depósito com um juro anual de 3,8%. Ao fim de um ano passou a ter 10 535,7 €. Qual foi o valor inicial investido pela Maria?**

4 **O Pedro aplicou 60 000 € num produto financeiro ao qual está associado um juro anual simples de 3,2%.** Determina:

4.1. o capital final obtido ao fim de seis anos;

4.2. qual deveria ser o capital inicial a depositar para obter um capital de 90 000 euros ao fim de oito anos.

5 **Num depósito a prazo são aplicados 1500 € com uma taxa r de juros simples. Ao fim de três anos, o capital passou a ser 1603,50 €. Determina a taxa de juro anual, em percentagem.**

6 **A Silvia aplicou 25 000 € num depósito a prazo com uma taxa anual de juros simples de 2,5%. Ao fim de um certo número de anos, o capital final foi 28 125 €. Determina durante quantos anos esteve o dinheiro investido.**

7 **A Eduarda pretende comprar um computador no valor de 3200 €. Informaram-na que poderia pagar no prazo de três anos, em prestações mensais fixas, sendo aplicada uma taxa de juro anual de 5% sobre o valor do computador.**

7.1. Determina o valor de cada prestação mensal a pagar pela Eduarda.

7.2. A Marta comprou um computador igual ao da Eduarda, tendo optado pelo pagamento em três anos com uma taxa de juro aplicada ao valor do preço do computador de 3,5% no 1.° ano, 4,5% no 2.° ano e 6% no 3.° ano, sendo os juros igualmente distribuídos por todas as mensalidades.
Calcula o valor de cada mensalidade da Marta e compara-a com a da Eduarda.

8 **A Mariana fez um depósito a prazo com uma taxa anual de juro composto de 2,5%. Ao fim de sete anos, o capital acumulado era 12 504,97 €.**
Determina a quantia inicial que foi depositada pela Mariana.

9 **Determina, com aproximação às centésimas, o capital acumulado ao fim de cinco anos num investimento financeiro com um montante inicial de 18 500 € com uma taxa anual de juro composto de 2,4%, se a capitalização dos juros for:**

9.1. anual;

9.2. semestral;

9.3. trimestral.

10 **A Emília pretende aplicar 12 500 € num depósito a prazo durante seis anos. A instituição bancária apresentou-lhe três opções:**

Opção A	Opção B	Opção C
Juro simples com taxa anual de 4%	Juro composto com taxa anual de 3,6% e capitalizações trimestrais	Juro composto com taxa anual de 3,8% e capitalizações semestrais

Qual é a opção mais vantajosa para a Emília?

11 **O Francisco decidiu aplicar algumas poupanças num produto financeiro que lhe garantia uma taxa anual de juro de 1,8%. Ao fim de três anos de investimento, o seu capital foi 45 320 €. Determina qual seria o capital inicial investido, no caso de o Francisco ter optado por um regime de juros compostos com capitalizações mensais.**

ESPMAT10CAP © Porto Editora

Ficha 1.1. Problema estatístico

Deves ter presente que...

A resposta a um **problema estatístico** é vista como uma tendência/estimativa que resulta da recolha de dados, da sua representação e interpretação.

ESPMA10CAP © Porto Editora

1 **Em relação às seguintes situações, indica se existe variabilidade.**

1.1. Intervalo de tempo entre o fim do carregamento de um *tablet* até ao início do novo carregamento.

1.2. Tempo oficial de um jogo de futebol americano (faz uma pesquisa).

1.3. Tempo de espera por uma consulta num consultório médico.

2 **Na época dos Santos Populares, uma banca *snack-bar* funciona, diariamente, das 12 às 24 h.**

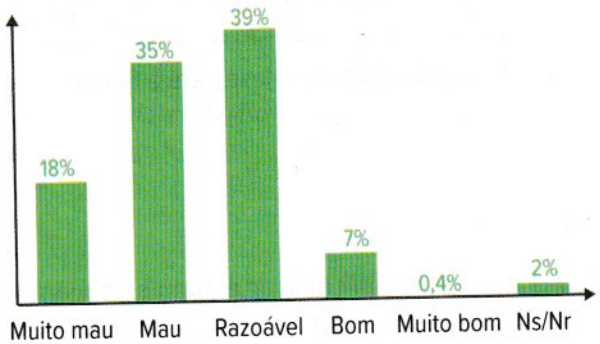
Neste contexto, apresenta dois exemplos de problemas estatísticos.

3 **A 24 de março de 2023, a *RTP*, a *Antena 1* e o *Público* divulgaram um relatório que incluiu análises de dados referentes a um inquérito realizado pelo CESOP – Universidade Católica Portuguesa.**

No gráfico estão os resultados obtidos relativamente à questão:

"Em geral, como avalia o desempenho do Governo que saiu das últimas eleições (janeiro de 2022)?".

Desempenho do Governo que saiu das últimas eleições



As repostas ao inquérito foram obtidas por entrevistas, via telefone, sendo os números escolhidos, aleatoriamente, de uma lista, também obtida de forma aleatória.

Foram obtidos 1002 inquéritos válidos, sendo 54% dos inquiridos homens.

ESPMA10E AP © Porto Editora

3.1. Neste estudo identifica a:

a) população;

b) variável em estudo e classifica-a;

c) dimensão da amostra.

3.2. Quantas entrevistas foram feitas a mulheres?

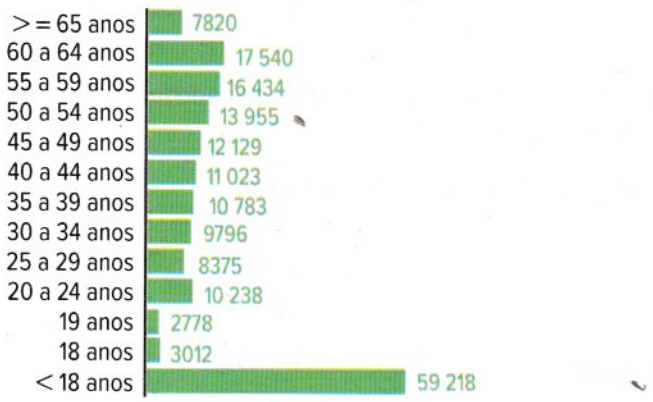
3.3. Indica, justificando, o valor lógico (verdadeiro ou falso) da afirmação:
"A maioria dos inquiridos avalia, negativamente, o desempenho do Governo."

4. **Em Portugal, em dezembro de 2023, existiam 89 287 famílias e 183 101 beneficiários com processamento de Rendimento Social de Inserção (RSI).**

No gráfico apresenta-se o número de beneficiários com processamento do RSI por grupo etário.

SEGURANÇA SOCIAL

Beneficiários com processamento de RSI por grupo etário



4.1. Identifica a variável em estudo e classifica-a.

4.2. Indica a percentagem, arredondada às décimas, de beneficiários com:

a) menos de 18 anos;

b) pelo menos 50 anos.

ESPMA10CAP © Porto Editora

Ficha 1.2. Fases de um estudo estatístico

Deves ter presente que...

- Antes do procedimento estatístico é fundamental o **planeamento**, que deve incluir:
  - identificar a **população**, sobre a qual se pretende recolher informação;
  - identificar as **variáveis** a estudar;
  - decidir por um **recenseamento** ou por uma **sondagem**; no caso de uma sondagem, é fundamental que a **amostra** selecionada seja **representativa da população**.

    Uma amostra mal selecionada e não representativa da população diz-se **enviesada** e pode levar a conclusões erradas sobre a população.
- A **dimensão da amostra** depende da variabilidade apresentada pelos valores da variável. Quanto maior for essa variabilidade maior deve ser a dimensão da amostra.

ESPMA10CAP © Porto Editora

1 **Em relação às seguintes situações diz, justificando, se deve fazer-se um recenseamento ou uma sondagem.**

1.1. Pretende-se determinar o número de habitantes de uma cidade, com indicação do género, nacionalidade e profissão.

1.2. Antes de um ato de eleição, pretende-se prever qual será o partido vencedor.

2 **O José pretende conhecer o número de carros associado a cada agregado familiar na sua cidade. Para tal, considerou 100 agregados familiares da sua freguesia.**

2.1. O agregado familiar do José é uma unidade estatística? Justifica.

2.2. Qual foi a amostra utilizada? Indica a dimensão da amostra.

2.3. A amostra é representativa da população? Justifica.

3 **Indica a técnica para selecionar amostras aleatórias que usarias para estudar:**

3.1. a percentagem de fumadores de um país de acordo com a idade;

3.2. a opinião dos alunos sobre o horário de abertura da escola, utilizando uma amostra e questionando-os, num determinado dia e à medida que chegam à escola.

3.3. a opinião dos Encarregados de Educação relativamente ao uso do telemóvel na escola.

4 **Na escola da Luana, em que há alunos do 5.º ao 12.º ano, pretende-se fazer duas sondagens:**

Sondagem A: Estimar o número de alunos do 3.º Ciclo que almoçam na cantina.

Sondagem B: Estimar o número de pessoas (alunos, professores e funcionários) que almoçam na cantina.

4.1. Qual é a população em cada uma das sondagens?

4.2. Para qual dos estudos propões uma maior dimensão da amostra? Justifica.

5 **Na figura é apresentada a ficha técnica de uma sondagem divulgada pelo *Jornal de Notícias* no dia 28 de março de 2020.**

5.1. Indica a população relacionada com o estudo e a dimensão da amostra.

5.2. Que técnica de amostragem foi usada neste estudo?

5.3. Com que fase do estudo estatístico está relacionada a informação referida no 2.º parágrafo?

Ficha técnica

Sondagem realizada pela Pitagórica para o JN e a TSF, com o objetivo de avaliar a opinião dos portugueses sobre temas relacionados com as eleições legislativas e com a atualidade do país.

O trabalho de campo decorreu entre os dias 13 e 21 de março e foram recolhidas 605 entrevistas telefónicas, a que corresponde uma margem de erro máxima de ±4,07% para um nível de confiança de 95,5%.

A amostra foi recolhida de forma aleatória junto de eleitores portugueses recenseados e foi devidamente estratificada por género, idade e região.

A taxa de resposta foi de 64,09% e a direção técnica do estudo é da responsabilidade de Rita Marques da Silva.

A ficha técnica completa, bem como todos os resultados, foram depositados junto da Entidade Reguladora da Comunicação Social, que os disponibilizará para consulta *online*.

© PORTO EDITORA

Ficha 2.1. Dados quantitativos discretos ou contínuos

Deves ter presente que...

Variável quantitativa

Variável discreta
Quando a variável pode assumir um número finito ou infinito numerável de valores distintos.

Variável contínua
Quando a variável pode assumir qualquer valor num intervalo de números reais

ESPMA10CAP © Porto Editora

1 **Classifica as seguintes variáveis em qualitativas ou quantitativas e, estas, em discretas ou contínuas.**

A: Grau de satisfação de um produto de higiene

B: Número de irmãos dos alunos de uma escola

C: As alturas dos jogadores de uma equipa de basquetebol

D: *Peso* dos alunos de uma academia de dança

E: Nível (Reduzido, Médio ou Elevado) obtido pelos alunos de uma turma num teste

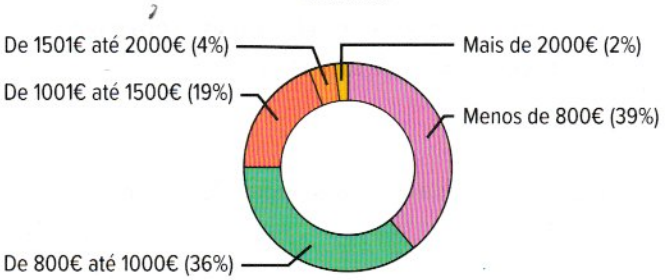
F: Número de telemóveis por família

2 **No dia 26 de fevereiro de 2024, o Jornal *Expresso* divulgou o seguinte gráfico:**

2.1. Como classificas a variável em estudo?

2.2. Constrói uma tabela com a informação apresentada no gráfico.

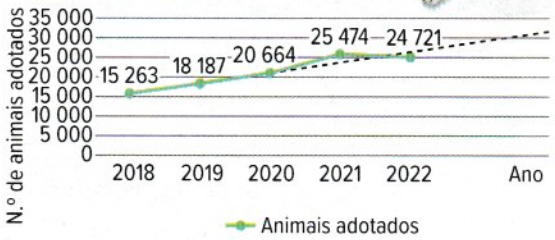
Salários líquidos dos jovens entre os 18 e os 35 anos
Trabalhadores por conta de outrem em 2023



2.3. Indica, justificando, se a afirmação é verdadeira ou falsa.

"Três em cada quatro jovens, entre os 18 e os 35 anos, têm salários até mil euros líquidos."

3 **No gráfico apresenta-se o número de animais adotados, em Portugal, através dos Centros de Recolha Oficiais (CRO) entre os anos 2018 e 2022.**



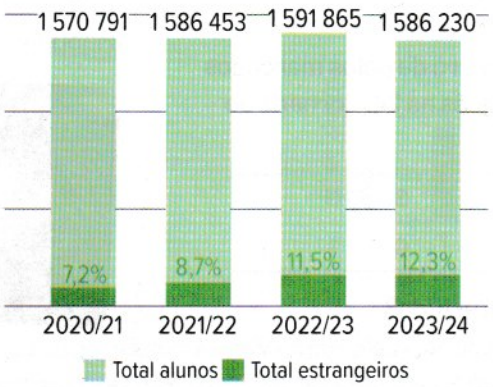
3.1. Como classificas a variável em estudo?

3.2. Indica a percentagem, arredondada às centésimas, da diminuição do número de animais adotados entre os anos 2021 e 2022.

3.3. Por análise destes resultados, que conclusão tiras em relação ao número de animais adotados no período de tempo referido?

4 **No gráfico está representada a percentagem de alunos estrangeiros matriculados do Pré-escolar ao Secundário nos últimos quatro anos letivos em Portugal.**

Alunos matriculados do pré-escolar ao secundário
Total de alunos



4.1. Indica uma possível questão estatística para a elaboração deste estudo.

4.2. A partir da informação dada, completa a tabela.

Ano letivo	N.º de alunos estrangeiros	Freq. relativa (%)
2020-2021		
2021-2022		
2022-2023		
2023-2024		

4.3. Por análise destes resultados, que conclusão tiras em relação ao número de alunos estrangeiros matriculados em Portugal?

ESPMATUCAP © Porto Editora

Ficha 2.2. Organização de dados

Deves ter presente que...

- **Tabelas de frequências para dados discretos**
  - O número de vezes que cada um dos valores ocorre é a **frequência absoluta** desse valor e representa-se por n_i.
  - Sendo f_i a **frequência relativa**, $f_i = \frac{n_i}{N}$, sendo N o número total de dados.
  - A **frequência absoluta acumulada**, N_i, obtém-se acumulando as frequências absolutas.
  - Precede-se de igual forma para a **frequência relativa acumulada**, F_i.
- **Tabelas de frequências para dados agrupados em classes**
  - As **classes** são representadas por **intervalos do tipo** $[a, b[$;
  - A **amplitude da classe** é igual a $b - a$.
- Os **histogramas** são constituídos por retângulos, em que um dos lados coincide com a marcação das classes no eixo horizontal e a área de cada retângulo corresponde à **frequência** (absoluta ou relativa) da respetiva classe.

Nota: Nos casos em que as classes têm igual amplitude, é usual considerar as alturas dos retângulos iguais às frequências das classes correspondentes.

1 **A seguir estão registados o número de golos marcados pelas equipas de futebol português na 24.ª jornada do campeonato 2023-2024.**

1	5	0	0	1	3	3	0	0
0	0	0	3	2	5	0	1	1

1.1. Como classificas a variável estudo?

1.2. Organiza os dados numa tabela de frequências absolutas e relativas, simples e acumuladas.

1.3. Indica a percentagem de equipas que marcaram:

a) no máximo dois golos;

b) pelo menos três golos.

ESPMA10CAP © Porto Editora

2 **Relativamente ao número de golos marcados pelas equipas espanholas na 25.ª jornada do campeonato 2023-2024 foi construída a seguinte tabela de frequências:**

x_i	n_i	N_i	f_i (%)	F_i (%)
0	6		30	
1		14		
2			20	
3	1			
5				

2.1. Completa a tabela.

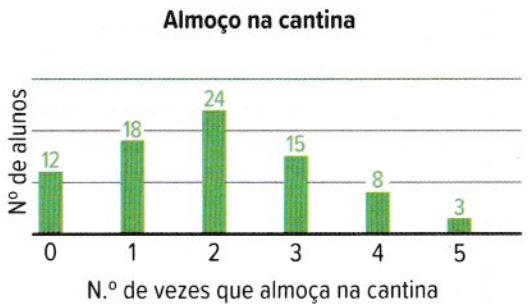
2.2. Quantas equipas marcaram mais de dois golos?

2.3. A maior parte das equipas marcou, no máximo, um golo ou marcou pelo menos, dois golos?

3 **Numa escola foi selecionada uma amostra do conjunto dos alunos em que todos responderam à questão:**

"Quantas vezes almoças na cantina durante a semana?"

As respostas foram apresentadas no gráfico de barras ao lado.



3.1. Para o conjunto de dados apresentado, constrói uma tabela de frequências absolutas e relativas, simples e acumuladas.

ESPMAT10CAP © Porto Editora

3.2. Determina:

a) o número de alunos que almoça menos de duas vezes por semana na cantina;

b) a percentagem de alunos que almoça, pelo menos, três vezes na cantina.

4 **Num consultório médico, os tempos de espera dos doentes, em minutos, estão representados a seguir.**

10	19	15	40	12	15	21	13	30	42	12	34	18
11	22	30	10	33	26	35	20	15	13	25	14	

4.1. Como classificas a variável em estudo?

4.2. Agrupa os dados em classes de amplitude 5, sendo [10, 15[a primeira, e constrói uma tabela de frequências absolutas e relativas, simples e acumuladas.

4.3. Indica o número de pessoas cujo tempo de espera foi inferior a 20 minutos.

4.4. Determina a percentagem de pessoas que não esperaram menos de 30 minutos.

ESPMA10CAP © Porto Editora

5 **Considera as alturas, em centímetros, de 20 recém-nascidos.**

50,0	45,4	49,1	46,1	51,9	46,5	47,8	49,0	51,5	48,0
48,8	52,9	48,0	47,3	52,2	46,0	48,3	47,1	49,2	50,0

5.1. O valor mínimo é 45,4. Para construir um histograma e facilitar a contagem, começa por construir uma tabela de frequências absolutas e recorre à tecnologia, tomando para primeira classe:

a) [45, 46[**b)** [45, 47[

5.2. Atendendo ao contexto e à amplitude dos dados, qual dos histogramas obtidos em **5.1.** te parece mais adequado? Justifica.

6 **Os seguintes dados referem-se à duração, em minutos, do percurso casa-escola realizado, num dado dia, por uma amostra aleatória de 30 alunos, de uma escola secundária, que se deslocam para a escola a pé.**

5	10	21	31	5	8	31	12	30	11
6	9	13	25	10	18	7	9	8	12
20	32	21	32	11	24	11	9	10	20

6.1. Para representar graficamente o conjunto de dados, considera as opções **I** e **II**:

I: Utilizar um diagrama de caule-e-folhas **II**: Utilizar um diagrama de barras

Qual das opções é a mais adequada para representar o conjunto de dados? Justifica porque rejeitas a outra opção.

6.2. Usando tecnologia, constrói o diagrama de caule-e-folhas e o diagrama de extremos e quartis.

ESPAÇO APO Porto Editora

Ficha 2.3. Medidas de localização

Deves ter presente que...

- Dado um conjunto de dados que tomam k valores (ou modalidades) diferentes, chama-se **moda** ao(s) valor(es) (modalidade(s)) que tem (têm) maior frequência absoluta e representa-se por M_o.
- **Classificação da moda:**
  - **amodal**: todos os valores têm igual frequência absoluta;
  - **unimodal**, **bimodal**, **plurimodal**, existe um, dois ou mais de dois valores (ou modalidades) com maior frequência absoluta, respetivamente.
- **Média aritmética:** $\bar{x} = \dfrac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_k x_k}{N}$; $\bar{x} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots + f_k x_k$
- **Propriedades da média:** Adicionando k a todos os dados ou multiplicando todos os dados por k, obtêm-se novos conjuntos de dados cuja média é, respetivamente, igual a $\bar{x} + k$ e $k \times \bar{x}$; é muito sensível à existência de *outliers*.
- **Mediana:** Se o número de dados é ímpar, o valor da mediana é o valor "central"; se o número da dados é par, o valor da mediana é a média dos valores "centrais". É muito resistente à existência de *outliers*.
- Numa amostra ordenada, P_k, com $1 \leqslant k \leqslant 100$, é o número tal que:
  - pelo menos, $k\%$ dos elementos da amostra são menores ou iguais a P_k;
  - no máximo, $(100 - k)\%$ dos elementos da amostra são superiores a P_k.
- $Q_1 = P_{25}$; $Q_2 = M_e = P_{50}$; $Q_3 = P_{75}$

1 **A seguir está representado um conjunto de 15 dados, sendo um deles b.**

Sabe-se que o valor mínimo e o valor máximo do conjunto de dados são 10 e 16, respetivamente.

12	b	10	15	16
11	15	13	12	10
15	10	12	10	12

Indica um valor a atribuir a b de modo que a moda seja:

1.1. unimodal;

1.2. bimodal;

1.3. plurimodal.

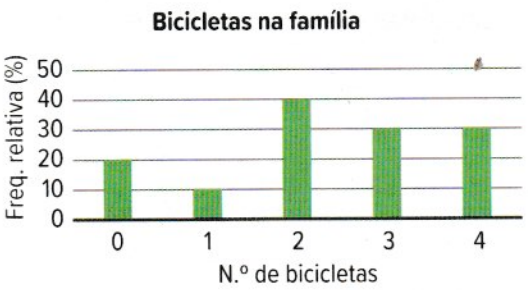
ESPMA10CAP © Porto Editora

2 **As idades, em anos, dos Encarregados de Educação dos alunos de uma turma estão organizadas na tabela.**

x_i	36	38	39	40	42	43	45
n_i	3	3	4	5	4	2	4

Determina, arredondada às unidades, a idade média dos Encarregados de Educação.

3 **O número de bicicletas existentes em cada família de um conjunto de alunos está representado no gráfico.**



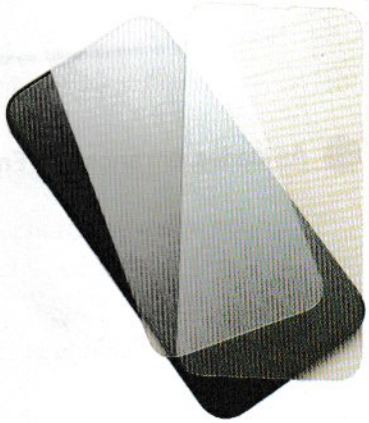
Qual é o número médio de bicicletas por família?

4 **Considera a amostra relativa às alturas, em centímetros, de 20 crianças.**

120	123	130	129	125
132	125	119	122	115
130	128	125	120	118
126	132	131	125	124

4.1. Constrói uma tabela de frequências absolutas simples, agrupando os dados em classes de amplitude 5 e acrescenta-lhe uma coluna com as marcas das classes.

4.2. Calcula um valor aproximado da altura média das crianças.



ESPMAIOCAP © Porto Editora

5 **O número de películas para telemóveis vendidas por dia, numa loja, no mês de dezembro, está representado no diagrama de caule-e-folhas.**

Número de películas vendidas em dezembro

1	0	0	1	2	2			
2	0	3	3	5	5	5	6	
3	2	5	5	6	8	8	9	9
4	3	4	4	4	8	8	9	9
5	1	1	5					

Legenda: 3 | 2 representa 32 películas

5.1. Recorre à calculadora e calcula, em média, o número de películas para telemóveis vendidas, por dia, durante o mês de dezembro. Apresenta o resultado arredondado às centésimas.

5.2. Completa a tabela de frequências absolutas simples, agrupando os dados em classes, em que a primeira é [10 , 20[e indicando, na última coluna, as marcas das classes.

Películas	n_i	Marca da classe (x_i)

a) Calcula um valor aproximado da média, apresentando o resultado arredondado às centésimas e compara-a com o resultado obtido em **5.1.**.

6 **O Tomás fez duas sequências de rotações de uma roda numerada de 1 a 8 .**

Na primeira sequência, a soma das pontuações obtidas foi 54 e a pontuação média, por rotação, foi 4,5 .

Na segunda sequência rodou 16 vezes a roda e a pontuação média, por rotação, foi 5,25 .

Determina, no conjunto das duas sequências, a pontuação média, por rotação.

Apresenta o resultado arredondado às décimas.

7 **A média dos salários líquidos mensais dos técnicos de manutenção de uma determinada empresa é 1160 €.**

7.1. Indica o valor da média dos salários líquidos mensais se cada salário líquido tiver:

a) um aumento de 50 €;

b) um aumento de 5%;

c) uma redução de 1%.

7.2. Admite que a equipa de técnicos de manutenção é constituída por oito elementos. No entanto, no final do mês vai ser alterada dado que sairão dois colaboradores que têm vencimento mensal líquido de 1040 € e entrará um novo colaborador com um salário mensal líquido de 860 €. Determina a média dos salários líquidos mensais após a alteração. Apresenta o resultado, em euros, arredondado às centésimas.

8 **Um conjunto de alunos foi questionado sobre o número de computadores (x_i) existentes nas suas casas.**

Os resultados foram:

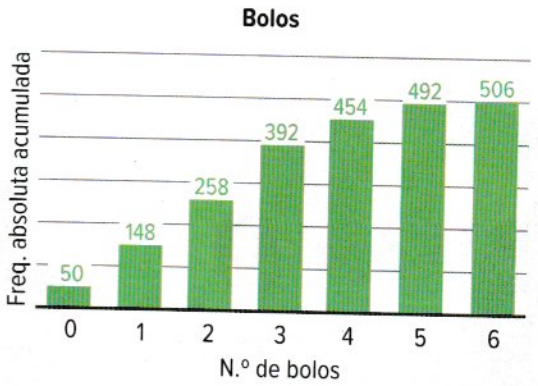
x_i	n_i	
1	2	
2	11	
3	15	
4	8	
5	5	

8.1. Completa a tabela com as frequências absolutas acumuladas.

8.2. Determina a mediana do conjunto de dados.

9 **Um grupo de pessoas indicou o número de bolos que comeu nos últimos 15 dias. Os dados foram apresentados no gráfico.**

Determina a mediana do conjunto de dados.



ESPMA10CAP © Porto Editora

10 **Na tabela estão registados o número de publicações que os alunos de uma turma fizeram nas redes socias, no último mês.**

Publicações	n_i				
[0, 200[	8				
[200, 400[	13				
[400, 600[	4				
[600, 800[	2				
[800, 1000[	1				

10.1. Completa a tabela com as marcas das classes, as frequências absolutas acumuladas e as frequências relativas simples e acumuladas.

10.2. Calcula, arredondado às unidades, um valor aproximado da média e indica a classe modal.

10.3. Indica a classe a que pertence a mediana do número de publicações feitas pelos alunos da turma, no último mês.

11 **Considera o seguinte conjunto de dados:**

12	9	15	16	18	11	46	13

11.1. Calcula a média e identifica a mediana do conjunto de dados.

11.2. Identifica um *outlier* e retira-o desse conjunto.

a) Calcula a média e identifica a mediana do novo conjunto de dados.

b) Qual é o efeito do *outlier* na média e na mediana do conjunto inicial de dados?

ESPMA10CAP © Porto Editora

12 **Os seguintes dados referem-se ao *peso*, em gramas, de ananases dos Açores, efetuados num dia de colheita numa estufa de S. Miguel.**

1395	1295	1170	1115	1345	1335	1285	1145	1195	1100
1400	985	1475	1465	1245	1395	1355	1375	1100	1195

12.1. Determina a mediana, o 1.º quartil e o 3.º quartil.

12.2. Determina o percentil 72 e interpreta o resultado no contexto do problema.

12.3. Justifica porque é que há só dois ananases com um *peso* superior a P_{90}.

12.4. Determina, dos 43% ananases mais *pesados*, aquele que apresenta menor *peso*.

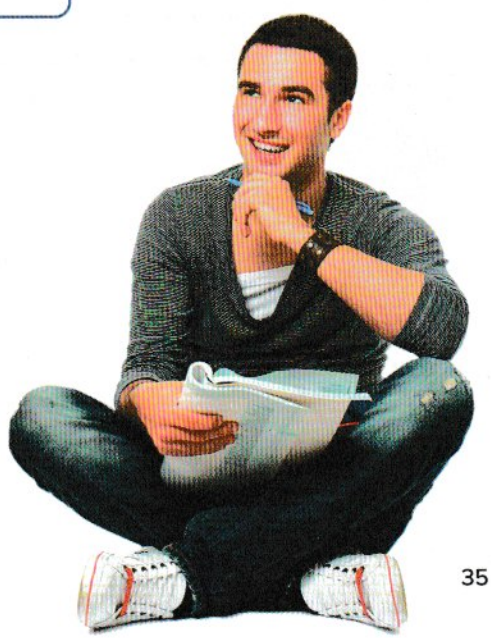
13 **A tabela seguinte apresenta o tempo, em minutos, gasto pelos alunos do 10.º ano de uma escola na resolução de um enigma proposto pelo Departamento de Matemática.**

Classe	n_i		
[8, 10[	10		
[10, 12[	15		
[12, 14[	30		
[14, 16[	25		
[16, 18[	15		

13.1. Completa a tabela indicando as frequências relativas e as frequências relativas acumuladas.

13.2. Indica a classe a que pertence o percentil 30.

13.3. Determina um valor aproximado de P_{30} e interpreta o resultado obtido no contexto da situação apresentada.



LUMA 10.AP © Porto Editora

Ficha 2.4. Medidas de dispersão

Deves ter presente que...

- A **amplitude** de um conjunto de dados é a diferença entre o valor máximo e o valor mínimo. Se for igual a zero, não existe variabilidade de dados.
- A **amplitude interquartil** de um conjunto de dados é a diferença entre o 3.º quartil e o 1.º quartil. Se for igual a zero, nada se pode concluir acerca da variabilidade de dados.
- Numa amostra, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, de dimensão n, e média $\bar{x}$:
  - a **soma dos desvios**, $(x_i - \bar{x})$, é igual a zero. $(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + (x_3 - \bar{x}) + \ldots + (x_n - \bar{x}) = 0$
  - a **variância**, representada por s^2, define-se como:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}$$

  - o **desvio-padrão** (amostral) representa-se por s e é tal que:

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

- Quanto **maior** for o **desvio-padrão**, **maior** é a **dispersão** de dados.
- O **desvio-padrão é igual a zero** quando os dados são todos iguais (não há variabilidade).

1 **Considera as amostras de dois grupos, A e B, de cinco pessoas que fizeram um rastreio ao nível do colesterol no sangue.**

Grupo A:

80,1	160	115,6	152,1	252,7

Grupo B:

180	170,3	127,6	130,5	152,1

1.1. Para cada grupo indica o valor mínimo, o valor máximo e mostra que, em cada grupo, a média é igual à mediana, e iguais nos dois grupos.

ESPMAT10CAP © Porto Editora

1.2. Qual é o grupo de dados que transmite a ideia de maior dispersão?

1.3. Em cada grupo, determina a amplitude e a amplitude interquartil.

2 **Ao longo dos 13 primeiros dias de um determinado mês, a Dora contabilizou o número de chamadas recebidas, por dia, no seu telemóvel. A amostra obtida foi:**

4	15	10	11	9	11	9	16	12	6	7	13	16

2.1. Determina a média e a mediana do número de chamadas, por dia.

2.2. Determina a amplitude e a amplitude interquartil do conjunto de dados.

2.3. Qual foi a percentagem de dias em que o número máximo de chamadas recebidas pela Dora foi 8 ? Apresenta o resultado arredondado às unidades.

2.4. Indica o valor do P_{75} e o seu significado no contexto da situação apresentada.

2.5. Usando a tecnologia, representa os dados num diagrama de extremos e quartis.

© PORTO EDITORA

2.6. Sabe-se que no 14.º dia desse mês, a Dora recebeu 32 chamadas.

a) Indica um motivo para excluir este dado no cálculo das medidas das alíneas anteriores.

b) Qual das medidas de dispersão, amplitude ou amplitude interquartil, seria mais afetada?

c) Qual das medidas, média ou mediana, seria mais adequada para localizar o centro de distribuição dos dados, no caso de o número de chamadas no 14.º dia ser incluído? Justifica.

3 **Considera a seguinte amostra:**

14	25	12	15	26	17	29	30

3.1. Calcula a amplitude, amplitude interquartil e a média dos dados.

3.2. Indica o(s) dado(s) em que o valor absoluto do desvio em relação à média é:

a) maior;

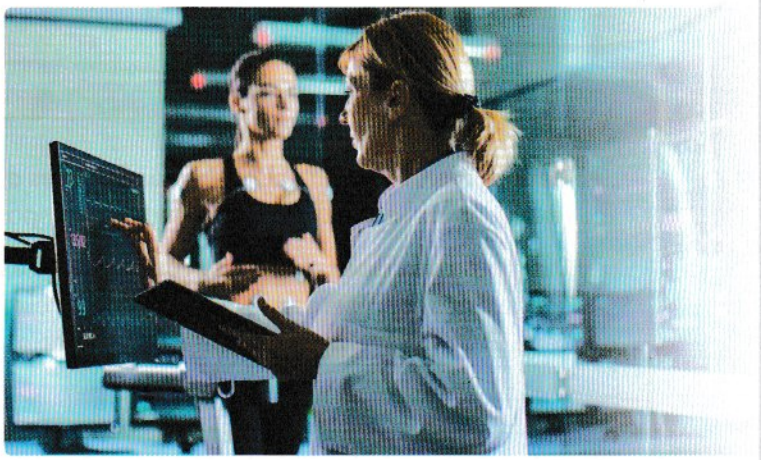
b) menor.

4 **Completa a seguinte tabela que se refere a um conjunto de dados.**

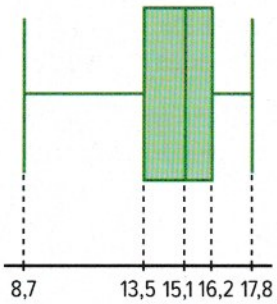
x_i		4		
$x_i - \bar{x}$	−4		3	2

ESPMA10CAP © Porto Editora

5 **Num estudo sobre a resistência individual ao esforço físico, submeteram-se dois grupos de pessoas a dois aparelhos diferentes, medindo-se o tempo, em minutos, até ao consumo máximo de oxigénio, obtendo-se os seguintes resultados:**



Passadeira:



$\bar{x} \approx 14{,}5$

Bicicleta:

7,5	12,7	8,7	13,4	11,1	10,9	9,1	9,7	11,5

5.1. Compara as duas amostras em relação à:

a) amplitude;

b) amplitude interquartil;

c) mediana;

d) média.

5.2. Em qual das amostras te parece que há maior dispersão?

5.3. Confirma, comparando os desvios-padrão, sabendo que o da amostra referente à passadeira é 2,59 .

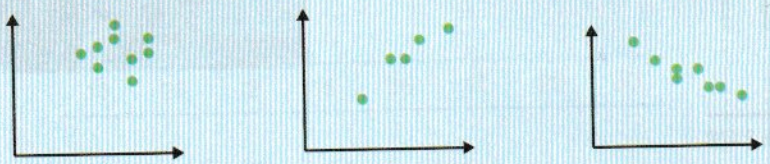
ESPMAT10CAP © Porto Editora

Ficha 3.1.

Dados quantitativos. Diagrama de dispersão

Deves ter presente que...

- **Dados bivariados** são dados obtidos de pares de variáveis (x, y), sendo x a variável independente (explanatória) e y a variável dependente (resposta).
- **Diagrama de dispersão (nuvem de pontos)** é a representação gráfica de dados bivariados (x_i, y_i), sendo estes representados num sistema de eixos coordenados por pontos de coordenadas (x_i, y_i), sendo x a variável independente (explanatória) e y a variável dependente (resposta).



- O coeficiente de correlação linear representa-se por r, e é tal que $r \in [-1, 1]$.
  - $r < 0$: correlação negativa
  - $r > 0$: correlação positiva
  - $r = 0$: correlação nula

1 **Numa aula de Matemática de uma turma do 10.º ano, iniciou-se um estudo acerca do *peso* e do comprimento dos alunos quando nasceram. Na tabela, cada um dos 23 alunos registou o seu *peso* (em kg) e o seu comprimento (em cm) aquando do seu nascimento.**

Peso (x_i)	3,5	3,750	4,100	4,050	2,850	3,125	...
Comprimento (y_i)	51	49	51	48	50	47	...

1.1. Em relação a este estudo, indica:

a) a população;

b) unidade estatística;

c) o número de variáveis em estudo e identifica-as;

d) a dimensão da amostra.

1.2. Indica o significado do par:

a) (3,5 ; 51)

b) (4,050 ; 48)

ESPMA10CAP © Porto Editora

2 **A 5 de janeiro de 2024, um artigo da BRANDS'ECO apresentava a seguinte notícia:**

"Metade dos portugueses gasta mais de 30% do orçamento mensal em alimentação."

Para um trabalho da escola, o Gil, a Beatriz, a Dora e o Valentim decidiram averiguar se a despesa com a alimentação está relacionada com o rendimento mensal. Para isso questionaram alguns dos seus familiares e obtiveram os resultados presentes na tabela ao lado.

Agregado familiar	Rendimento mensal (€)	Despesas com a alimentação (€)
A	960	380
B	1100	420
C	1800	580
D	1250	500
E	820	325
F	2200	615
G	1500	450
H	1900	600
I	1320	550
J	2500	750
K	1250	300
L	1650	510
M	1700	620
N	1400	500
O	1890	555
P	1800	600

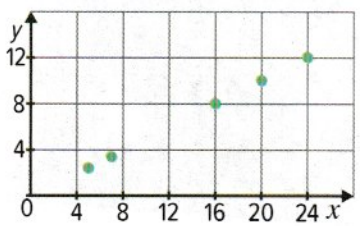
2.1. Identifica a variável explanatória e a variável resposta.

2.2. Recorre à calculadora e constrói um diagrama de dispersão e indica o tipo de correlação linear existente entre as variáveis.

2.3. Determina o coeficiente de correlação linear. Apresenta a resposta arredondada às centésimas. Que tipo de conclusão pode ser tirada pelos quatro amigos?

3 **Para cada representação identifica a opção correspondente ao possível coeficiente de correlação.**

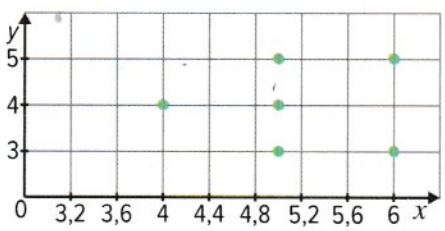
3.1.



(A) $r = -0{,}95$ **(B)** $r = 0$

(C) $r = 1$ **(D)** $r = 0{,}89$

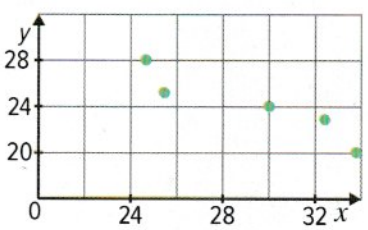
3.2.



(A) $r = 0{,}85$ **(B)** $r = -0{,}85$

(C) $r = 0{,}78$ **(D)** $r = 0$

3.3.



(A) $r = -0{,}93$ **(B)** $r = -1$

(C) $r = 0{,}83$ **(D)** $r = 1$

ESPMATICAP © Porto Editora

Ficha 3.2.

Reta de regressão

Deves ter presente que...

- A partir da **reta de regressão** é possível fazer estimativas.
- Se o diagrama de dispersão não evidencia uma tendência de "aproximação a uma reta", não tem interesse calcular o coeficiente de correlação linear e a reta de regressão.
- Um **gráfico de linhas** é um **caso particular** de um **diagrama de dispersão**.
- Os gráficos de linhas são adequados ao estudo da evolução de uma das variáveis em relação a outra variável, sendo, no geral, o tempo.

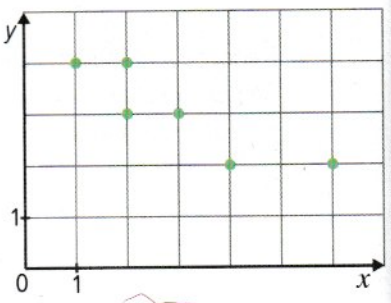
ESPMA10CAP © Porto Editora

1 **Considera a nuvem de pontos correspondente a uma amostra de dimensão seis.**

1.1. Calcula o coeficiente de correlação linear.

1.2. Determina o centro de gravidade da distribuição.

1.3. Faz um esboço da reta de regressão.



2 **Na tabela estão registados, para cada um dos filmes A, B, C, D, E, F e G o custo de produção, em milhares de euros, e o número de espectadores, em milhares, que teve nas semanas de exibição em Portugal.**

Filme	Custo de produção (em milhares de euros) x	Número de espetadores (em milhares) y
A	435	99
B	379	84
C	65	16
D	60	13
E	276	75
F	59	12
G	43	9

Adaptado – Exame MACS – 2017, Ép. especial

2.1. Determina as coordenadas do centro de gravidade da distribuição. Apresenta o resultado arredondado às unidades.

2.2. Recorrendo à calculadora, calcula, arredondado às centésimas, o coeficiente de correlação linear.

2.3. Qual é o sinal do declive da reta de regressão linear? Justifica.

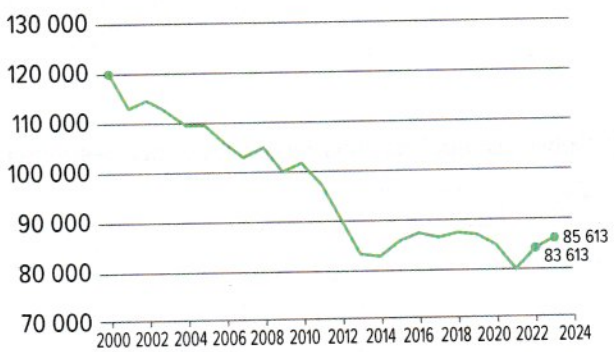
2.4. Recorrendo à calculadora representa a reta de regressão linear e indica uma equação do tipo $y = ax + b$, com a e b arredondados às milésimas.

2.5. Apresentando os resultados arredondados às unidades, estima:

a) o número de espectadores quando o custo de produção do filme for 400 milhares de euros;

b) o custo de produção de um filme com 65,5 milhares de espectadores.

3 **No gráfico estão representados o número de nascimentos, em Portugal, entre os anos de 2000 e 2023, sendo 83 613 e 85 613 oa valores relativos aos dois últimos anos.**



3.1. Em que ano se registou um menor número de nascimentos? Indica uma possível razão.

3.2. Determina, em percentagem, arredondado às centésimas:

a) o decréscimo que houve na natalidade, comparando os valores de 2000 e de 2023.

b) o acréscimo que houve na natalidade de 2022 para 2023.

Ficha 1.1.

Incentro de um triângulo

Deves ter presente que...

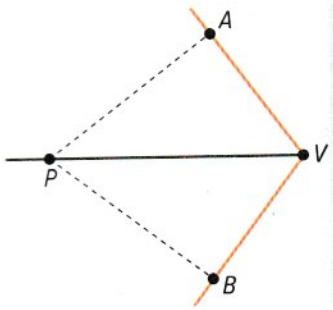
- A **bissetriz de um ângulo** é uma semirreta que o divide em dois ângulos congruentes (iguais).
- **Propriedades**: Qualquer ponto da bissetriz de um ângulo convexo é equidistante dos lados desse ângulo; qualquer ponto equidistante dos lados de um ângulo convexo pertence à bissetriz do ângulo.
- O **incentro de um triângulo** é o ponto de interseção das bissetrizes dos ângulos internos desse triângulo.
- A **circunferência inscrita num triângulo** é a circunferência com centro no incentro e tangente aos lados do triângulo.

ESPMA10CAP © Porto Editora

1 **Na figura está representado um ângulo AVB e a sua bissetriz $\dot{VP}$.**

Sabe-se que, fixada uma unidade:

- $\overline{VP} = 10$ e $\overline{VA} = 6$
- o ponto A é a projeção ortogonal de P sobre a reta VA;
- o ponto B é o pé da perpendicular traçada de P sobre VB.

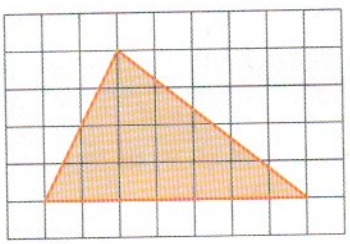


1.1. Mostra que os triângulos $[PAV]$ e $[PBV]$ são congruentes (iguais).

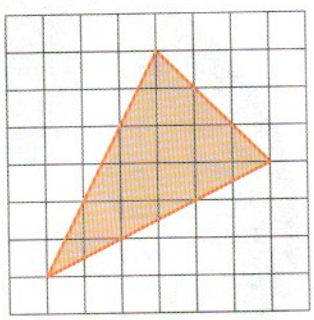
1.2. Determina a distância de P a VB.

2 **Sobre os seguintes triângulos, localiza o respetivo incentro.**

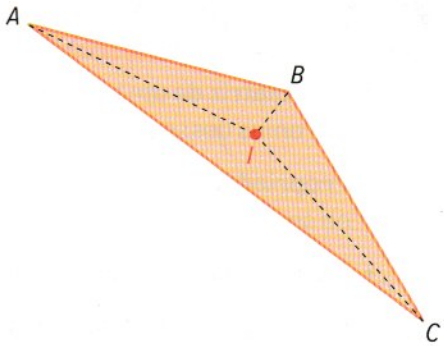
2.1.



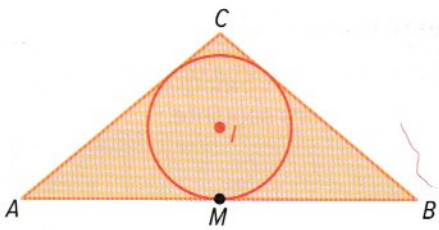
2.2.



3 **Considera um triângulo isósceles $[ABC]$, tal que $A\hat{B}C = 135°$. Sendo o ponto I o incentro do triângulo, determina as amplitudes dos ângulos internos dos triângulos $[ABI]$, $[BCI]$ e $[CAI]$.**



4 **No triângulo isósceles $[ABC]$ da figura está representado o seu incentro e a respetiva circunferência inscrita.**



Fixada uma unidade de comprimento:

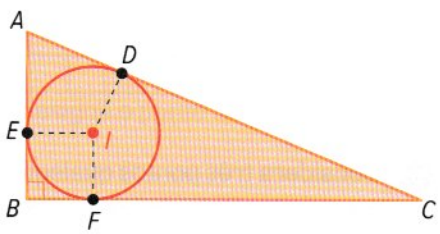
- $\overline{AB} = 24$ e $\overline{BC} = 15$
- M é o ponto médio de $[AB]$.

Determina a medida da área do círculo.

5 **Na figura está representado o triângulo retângulo $[ABC]$ e a circunferência inscrita de centro I.**

Sabe-se que:

- $\overline{AC} = 13$ cm e $\overline{AB} = 5$ cm
- os pontos D, E e F são os pés das perpendiculares traçadas de I sobre os lados do triângulo.



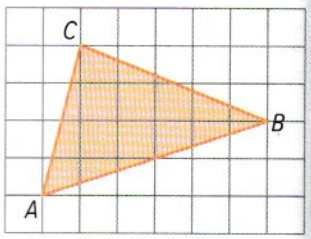
Determina, em centímetros, $\overline{IC}$. Apresenta o resultado arredondado às centésimas.

Ficha 1.2. Circuncentro de um triângulo

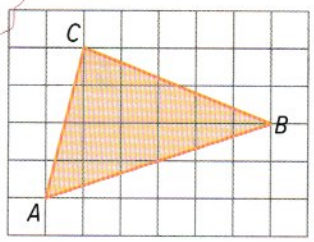
Deves ter presente que...

- A **mediatriz de um segmento de reta** é o conjunto de todos os pontos do plano que são equidistantes dos extremos desse segmento de reta.
- **Propriedade**: A mediatriz de um segmento de reta é a reta perpendicular a esse segmento que passa no seu ponto médio.
- O **circuncentro de um triângulo** é o ponto de interseção das mediatrizes dos lados do triângulo.
- A **circunferência circunscrita a um triângulo** é a circunferência que passa pelos seus três vértices. O centro da circunferência é o **circuncentro** do triângulo.
- **Propriedade**: Em qualquer triângulo equilátero, o incentro e o circuncentro coincidem.

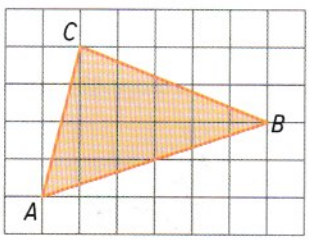
1 **Na figura ao lado está representado o triângulo $[ABC]$.**



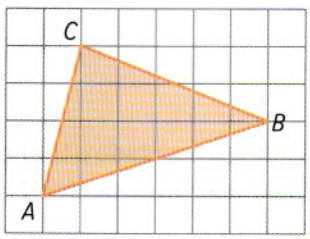
1.1. Existe um ponto do lado $[CB]$ que está à mesma distância de A e de B. Representa-o e designa-o por D na figura seguinte.



1.2. Na figura seguinte, pinta de azul todos os pontos do triângulo que estão mais próximos de A do que de B.



1.3. Na figura seguinte, representa o ponto que é equidistante dos três vértices do triângulo. Designa-o por E.



2 **Considera três pontos quaisquer não colineares P, Q e R. Representa a circunferência que passa pelos três pontos. Explica como procedeste.**

3 **Considera um triângulo $[ABC]$ retângulo em B, tal que $\overline{AB} = \overline{BC} = 6$ cm.**

3.1. Representa o circuncentro do triângulo $[ABC]$. O que verificas?

3.2. Representa a circunferência cujo centro é equidistante dos três vértices e determina o seu comprimento.

4 **Para celebrar os 40 anos da Flávia, a família Oliveira vai visitar a Ilha Terceira e pretende reservar alojamento numa localidade equidistante de Angra do Heroísmo (ponto A), Praia da Vitória (ponto V) e Biscoitos (ponto B).**

4.1. Descreve uma estratégia para identificar a localidade pretendida.

4.2. Faz uma construção geométrica que te permita identificar a localidade e designa o ponto que a representa por L.

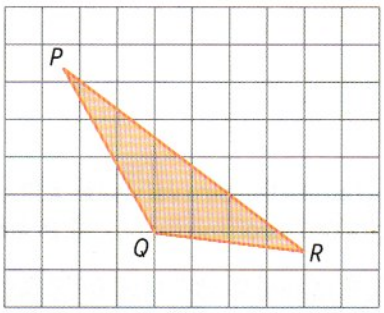
4.3. Como classificas o triângulo $[AVB]$ quantos aos ângulos? Justifica.

Ficha 1.3. Ortocentro de um triângulo

Deves ter presente que...

- A **altura** de um triângulo, relativamente a um dos lados, é o segmento de reta que une o **vértice oposto** a esse lado, ao **pé da perpendicular** traçada desse vértice sobre a reta suporte do lado considerado.
- O **ortocentro de um triângulo** é o ponto de interseção das retas suporte das alturas desse triângulo.

1 Considera o triângulo obtusângulo $[PQR]$ da figura, tal que $\overline{PQ} = 5$ cm, $\overline{QR} = 4$ cm e $\overline{PR} = 8$ cm.



1.1. Indica o valor lógico das seguintes afirmações, corrigindo as afirmações falsas.

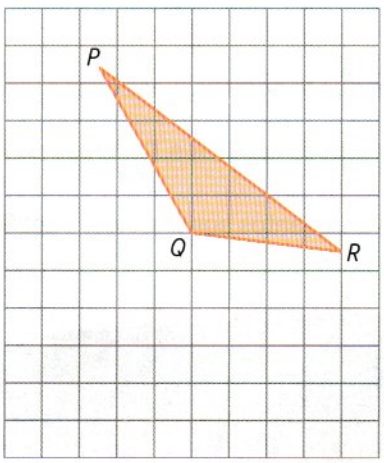
a) O ortocentro do triângulo $[PQR]$ pertence ao interior do triângulo.

b) O incentro do triângulo $[PQR]$ pertence ao exterior do triângulo.

c) O ortocentro do triângulo $[PQR]$ está mais próximo do ponto Q do que dos vértices P e R.

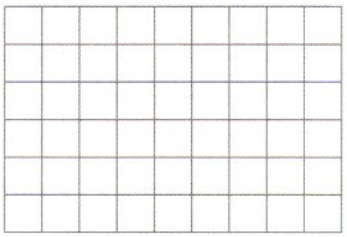
d) O circuncentro do triângulo $[PQR]$ está mais próximo dos vértices P e R do que do ponto Q.

1.2. Constrói, na figura seguinte, o ortocentro do triângulo $[PQR]$ e designa-o por O.

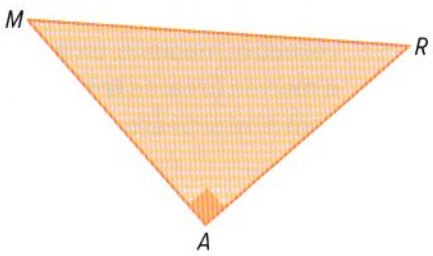


ESPMA10CAP © Porto Editora

2 **Desenha um triângulo retângulo à tua escolha e representa o ortocentro, O, e o circuncentro, C. O que observas?**



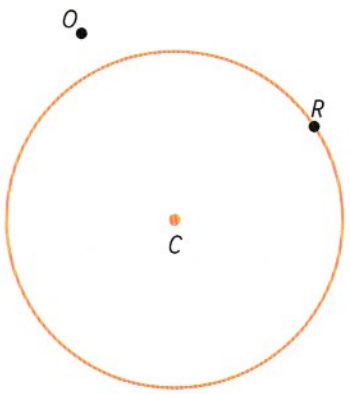
3 **Considera o triângulo isósceles $[MAR]$ da figura, retângulo em A, tal que $\overline{MA} = \overline{AR} = 10$ cm.**



3.1. Identifica, justificando, os pontos O e C que representam o ortocentro e o circuncentro do triângulo.

3.2. Determina o comprimento da circunferência circunscrita ao triângulo.

4 **Considera a circunferência de centro C, o ponto R pertencente à circunferência e o ponto O exterior à circunferência.**



Sabe-se que:

- a circunferência é circunscrita a um triângulo em que R é um dos vértices;
- o ponto O é o ortocentro desse triângulo.

Seja $[PQR]$ o triângulo referido.

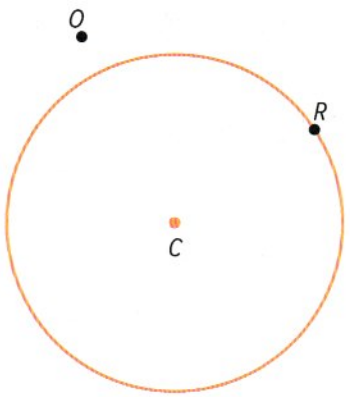
4.1. Como classificas o triângulo $[PQR]$ quanto aos ângulos? Justifica.

4.2. Considera a seguinte propriedade.

> Os pontos obtidos por reflexão do ortocentro em relação às retas que contêm os lados de um triângulo pertencem à circunferência circunscrita ao triângulo e são pontos de interseção das retas que contêm as alturas com a circunferência circunscrita.

Atendendo à propriedade enunciada, constrói o triângulo $[PQR]$.

Explica como procedeste.



ESPMA10CAP © Porto Editora

Ficha 1.4. Baricentro de um triângulo

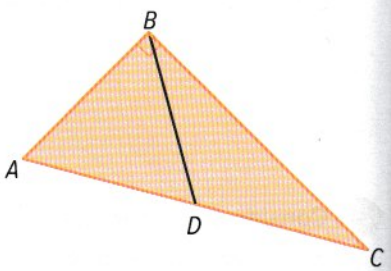
Deves ter presente que...

- A **mediana de um triângulo** é um segmento de reta cujos extremos são um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto.
- O **baricentro de um triângulo** (ou **centro de massa** ou **centroide**) é o ponto de interseção das medianas desse triângulo.
- **Propriedades**: A distância do baricentro de um triângulo a um vértice é igual a $\frac{2}{3}$ do comprimento da respetiva mediana; uma **mediana** de um triângulo divide-o em **dois triângulos equivalentes**, ou seja, com a mesma área; as **três medianas** de um triângulo dividem-no em **seis triângulos equivalentes**, ou seja, com a mesma área.

1 **O triângulo $[ABC]$ da figura é retângulo em B.**

Sabe-se que:

- $[BD]$ é uma mediana e $\overline{BD} = 6$ cm;
- $\overline{AB} = 6$ cm e $\overline{BC} = 6\sqrt{3}$ cm.



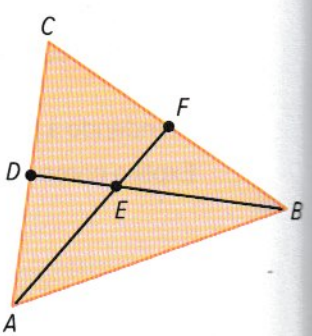
1.1. Classifica, justificando, os triângulos $[ABD]$ e $[BDC]$ quanto aos lados.

1.2. Indica a amplitude dos ângulos internos do triângulo $[BDC]$.

1.3. Calcula a área do triângulo $[ABD]$ e a do triângulo $[BDC]$.

2 **Relativamente ao triângulo $[ABC]$ da figura, sabe-se que:**

- D e F são pontos médios de $[AC]$ e $[BC]$, respetivamente;
- E é o ponto de interseção de $[DB]$ e $[AF]$;
- $\overline{CB} = 9$ cm; $\overline{AE} = 4{,}9$ cm e $\overline{DB} = 8$ cm.



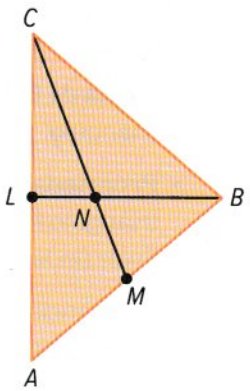
2.1. Determina a distância do baricentro ao ponto médio de $[AC]$.

2.2. Determina, em cm, arredondado às décimas, o perímetro do triângulo $[BEF]$.

ESPMA | OCAP © Porto Editora

3 **O triângulo $[ABC]$ da figura é isósceles, sendo $\overline{AB} = \overline{BC}$. Sabe-se que:**

- N é o baricentro do triângulo;
- a área do triângulo $[ABC]$ é igual a $42\ cm^2$;
- $\overline{LA} = 6\ cm$ e $\overline{CM} = 9{,}6\ cm$.



3.1. Indica, em cm^2, a área do:

a) triângulo $[ABL]$;

b) triângulo $[LNC]$;

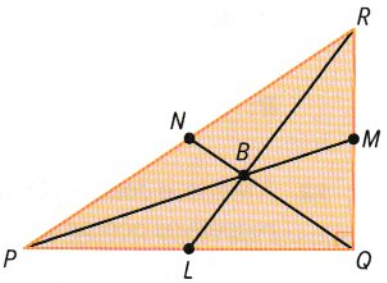
c) quadrilátero $[AMNL]$.

3.2. Determina, em cm, arredondado às centésimas, o perímetro do triângulo $[NMB]$.

4 **Considera o triângulo $[PQR]$ retângulo em Q.**

Sabe-se que:

- L, M e N são os pontos médios dos lados do triângulo;
- $\overline{RM} = 2\ cm$ e $\overline{PB} = \frac{4}{3}\sqrt{10}\ cm$.



4.1. Que nome dás aos segmentos de reta $[PM]$, $[LR]$ e $[QR]$ e ao seu ponto de interseção, B?

4.2. Identifica o ortocentro e o circuncentro do triângulo $[PQR]$.

4.3. Determina:

a) $\overline{BM}$, em cm;

b) a área do quadrilátero $[LQMB]$, em cm^2;

c) a área do triângulo $[PQR]$, em cm^2;

d) o perímetro do triângulo $[LQB]$, em cm.

ESPMA10CAP © Porto Editora

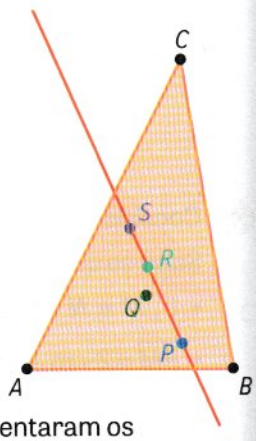
Ficha 1.5. Reta de Euler

Deves ter presente que...

- A **reta de Euler** de um triângulo é a reta que passa pelo ortocentro, baricentro e circuncentro desse triângulo.
- **Propriedades**: No caso de o triângulo ser **isósceles**, o incentro também pertence à reta de Euler; se o triângulo for **equilátero**, os quatro pontos notáveis são coincidentes, não permitindo definir a reta de Euler (indeterminada).
- A distância do ortocentro ao baricentro é o dobro da distância do baricentro ao circuncentro. A distância do ortocentro ao circuncentro é o triplo da distância do baricentro ao circuncentro.

ESPMA | DCAP © Porto Editora

1 **Na figura está representado um triângulo escaleno $[ABC]$, bem como os pontos P, Q, R e S que representam os seus pontos notáveis: incentro, circuncentro, ortocentro e baricentro.**



1.1. Faz a legenda associando a cada ponto a respetiva etiqueta.

Incentro **Baricentro** **Ortocentro** **Circuncentro**

Pontos:

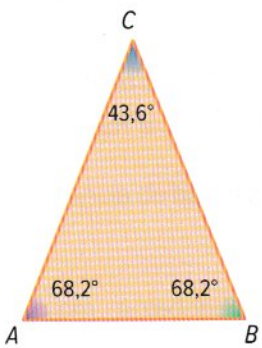
P: _____; Q: _____

R: _____; S: _____

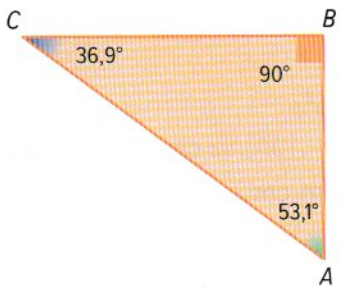
1.2. A Maria, o João e o Miguel construíram os triângulos I, II e III, um cada um, e representaram os respetivos pontos notáveis.

- A Maria verificou que os quatro pontos notáveis estavam sobre a respetiva reta de Euler e que dois dos pontos estavam no exterior do triângulo.
- O João também verificou que os quatro pontos pertenciam à reta de Euler, mas encontravam-se todos no interior do triângulo.
- O Miguel verificou que um dos pontos pertencia a um dos lados do seu triângulo e outro coincidia com o vértice oposto.

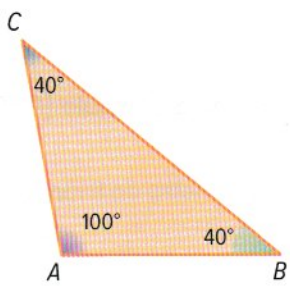
Triângulo I



Triângulo II



Triângulo III



Indica, justificando, quem construiu cada um dos triângulos I, II e III.

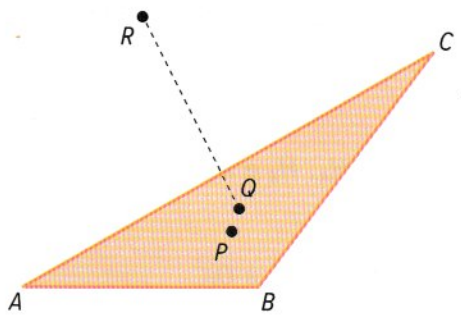
2 **Representa um triângulo $[ABC]$ isósceles à tua escolha.**

2.1. Representa o circuncentro, D, e o baricentro, E, do triângulo e traça a reta de Euler.

2.2. Justifica porque é que os quatro pontos notáveis pertencem à reta de Euler.

2.3. Existe algum triângulo em que não seja possível traçar a reta de Euler? Justifica.

3 **Observa o triângulo $[ABC]$ da figura onde estão representados três dos pontos notáveis desse triângulo, P, Q e R.**

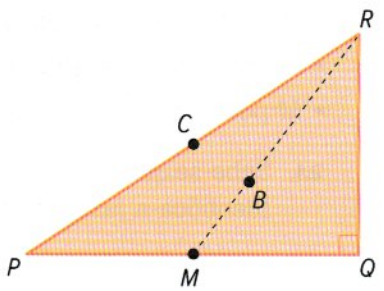


3.1. Identifica cada um dos pontos notáveis representados.

3.2. O ponto notável que não está representado pertence ao interior do triângulo? Justifica.

3.3. Sabendo que $\overline{RQ} = 3{,}69$ cm, determina a distância do ponto Q ao ponto notável que não está representado na figura.

4 **Relativamente ao triângulo $[PQR]$ da figura, sabe-se que:**



- o triângulo é retângulo em Q;
- M é o ponto médio de $[PQ]$;
- B e C são o baricentro e o circuncentro, respetivamente;
- $\overline{BR} = 2{,}5$ cm e $\overline{BQ} = 1{,}8$ cm.

Determina o comprimento do:

4.1. segmento de reta $[MR]$;

4.2. raio da circunferência circunscrita ao triângulo $[PQR]$.

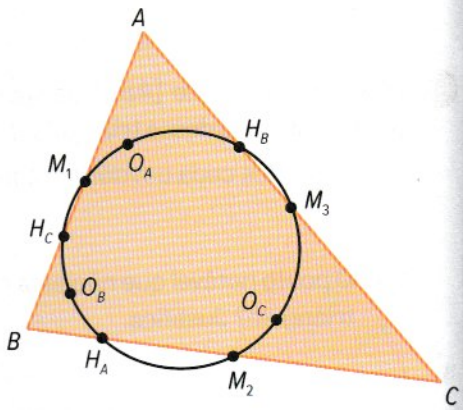
Ficha 1.6. Circunferência dos nove pontos

Deves ter presente que...

- A **circunferência dos nove pontos** de um triângulo é uma circunferência que passa por nove pontos relevantes desse triângulo: os pés das alturas do triângulo; os pontos médios dos lados do triângulo e os pontos médios dos segmentos de reta cujos extremos são o ortocentro e cada um dos vértices do triângulo.
- O **centro da circunferência dos noves pontos** pertence à reta de Euler e é o ponto médio do segmento definido pelo circuncentro e pelo ortocentro.
- O **raio da circunferência dos noves pontos** é metade do raio da circunferência circunscrita.

ESPMA IOCAP © Porto Editora

1 **Na figura está representado um triângulo $[ABC]$, a circunferência dos nove pontos e esses nove pontos relevantes.**



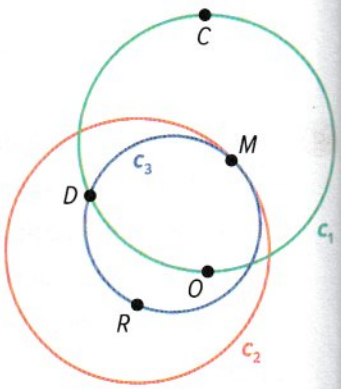
Indica o que representam os pontos:

1.1. M_1, M_2 e M_3

1.2. H_A, H_B e H_C

1.3. O_A, O_B e O_C

2 **Na figura estão representadas três circunferências, c_1, c_2 e c_3, e alguns pontos associados a um triângulo $[ABC]$, sendo:**

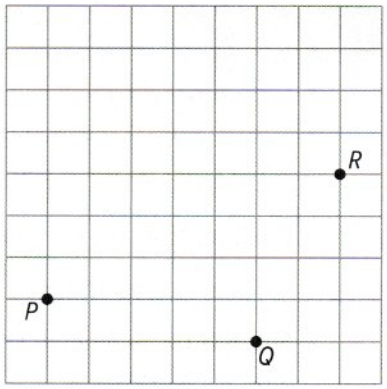


- O o ortocentro do triângulo;
- D o pé de uma das alturas do triângulo;
- M ponto médio de um dos lados do triângulo.

2.1. Sabe-se que uma das circunferências é a dos nove pontos do triângulo. Identifica-a, justificando porque rejeitas as outras circunferências.

2.2. Seja F o circuncentro do triângulo $[ABC]$. Calcula, arredondada às centésimas, a distância entre o baricentro e o ortocentro, sabendo que $\overline{FO} = 2{,}5$ cm.

3 **Considera os três pontos não colineares P, Q e R da figura.**



3.1. Na grelha ao lado, constrói uma circunferência à qual pertençam.

3.2. Como se designa a circunferência obtida no caso de:

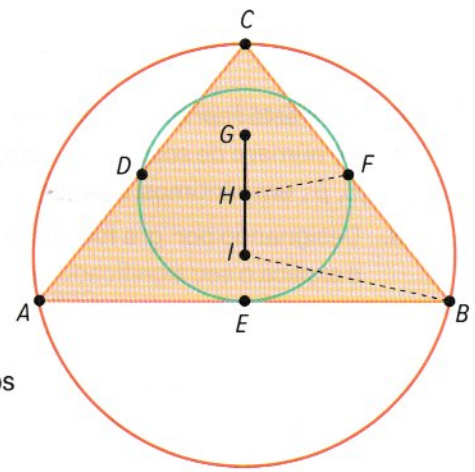
a) os pontos P, Q e R serem os vértices de um triângulo?

b) os pontos P, Q e R serem os pontos médios dos lados de um triângulo?

4 **Na figura está representado um triângulo $[ABC]$ e as circunferências centradas em I e H e de raios, respetivamente, $\overline{IB}$ e $\overline{HF}$.**

Sabe-se que:

- os pontos D, E e F são pontos médios dos lados do triângulo $[ABC]$;
- o ponto G é o ortocentro do triângulo;
- o ponto H é o ponto médio do segmento de reta $[GI]$;
- $\overline{AC} = \overline{CB}$
- $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{IE} = 0{,}9$ cm e $\overline{GH} = 1{,}15$ cm



4.1. Indica a designação da circunferência de centro H e que passa pelos pontos D, E e F e determina, em cm, a medida do seu comprimento.

4.2. Determina, em cm, arredondado às décimas, a distância do baricentro do triângulo ao ortocentro.

5 **Considera um triângulo $[RST]$ retângulo em R, tal que a distância do baricentro, B, ao ortocentro é 2,4 cm. Determina o comprimento do raio da circunferência dos nove pontos.**

ESPAÇO APC © Porto Editora

Ficha 1.1. Funções e representações

Deves ter presente que...

- Uma **função** f de A em B é uma correspondência que a cada elemento do conjunto A associa um e um só elemento do conjunto B.

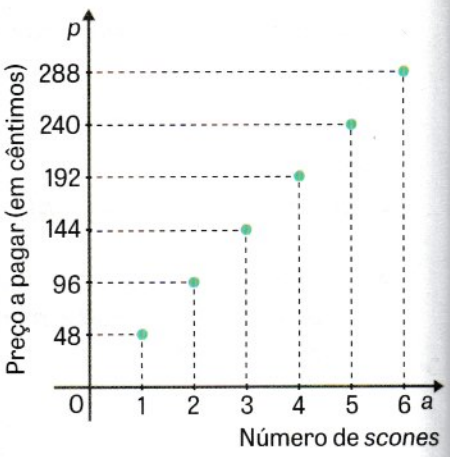
  O conjunto A é o **domínio** (ou conjunto de partida).

  O conjunto B é o **conjunto de chegada**.

  O conjunto das imagens é o **contradomínio**.

- **Formas de representar** uma função: diagrama de setas, tabela, representação gráfica e expressão algébrica/analítica.

1 **Na figura está representada a função que estabelece a correspondência entre o número de *scones*, a, comprados na padaria DoceEspiral, e o preço, p, em cêntimos, a pagar.**



1.1. Designando por g a função representada, indica o valor de $g(4)$ e explica o seu significado no contexto apresentado.

1.2. Traduz, em linguagem matemática, a afirmação:
"Paga-se 288 cêntimos na compra de seis *scones* na padaria DoceEspiral."

1.3. Repara que, à medida que a aumenta, p também aumenta.
Como justificas este facto no contexto da situação apresentada?

1.4. Indica uma expressão algébrica que relacione o preço, p, em cêntimos, a pagar com o número, a, de *scones*.

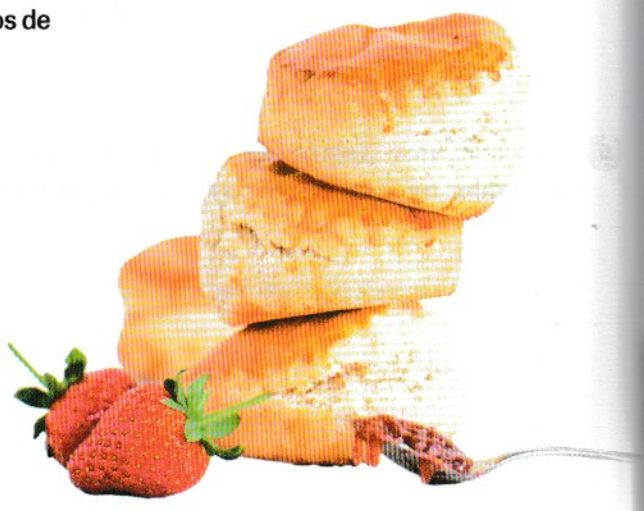
2 **Fixado um referencial no plano, qual dos seguintes conjuntos de pontos corresponde ao gráfico de uma função?**

(A) Uma circunferência.

(B) Uma reta paralela ao eixo das abcissas.

(C) Uma reta paralela ao eixo das ordenadas.

(D) Um quadrilátero.



ESPAÇO LOGAF © Porto Editora

3 **Seja g a função que, a cada elemento do conjunto A definido por $A=\left\{-3,\ -\frac{1}{3},\ 0,\ \frac{3}{2}\right\}$, associa a soma do seu dobro com -2. Representa a função g através de uma:**

3.1. tabela;

3.2. expressão analítica.

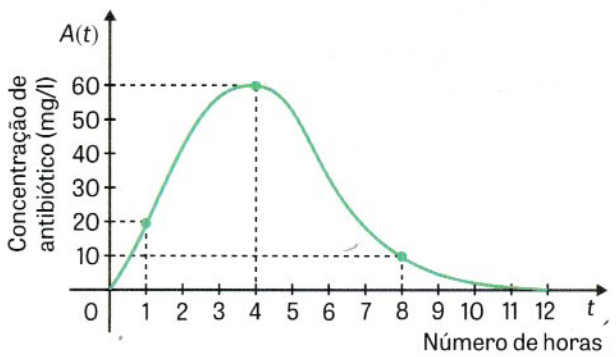
4 **Considera a correspondência que, a cada mês de um ano não bissexto, associa o número de dias desse mês.**

4.1. Justifica que esta correspondência é uma função.

4.2. Designa por d a função e por x, com $x \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ 12\}$, os meses do ano.
Indica o valor de $d(2)$ e interpreta o significado no contexto apresentado.

4.3. Resolve a equação $d(x)=30$ e interpreta a(s) solução(ões) no contexto apresentado.

5 **Num laboratório, um biólogo administrou um certo antibiótico a um rato. Mas, para que seja eficaz, é necessária uma concentração mínima desse antibiótico.**
O gráfico ao lado apresenta a concentração do antibiótico, $A(t)$, em miligramas por litro de sangue, t horas após a sua administração.
Indica, justificando, o valor lógico (verdadeiro ou falso) de cada uma das seguintes afirmações.



5.1. A concentração máxima de antibiótico ocorre quatro horas após a administração do antibiótico.

5.2. A eliminação do antibiótico começa a partir das cinco horas.

5.3. O tempo de crescimento da concentração foi maior do que o tempo de diminuição.

ESPMA10CAP © Porto Editora

Ficha 1.2.

Funções: alguns conceitos

Deves ter presente que...

Dada uma função $f: x \mapsto y = f(x)$:

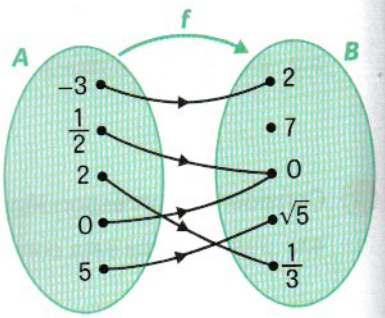
x: variável independente

y: variável dependente

Dá-se o nome de **objeto** a qualquer elemento do domínio e o nome de **imagem** ao transformado de um objeto.

ESPMAT10CAP © Porto Editora

1 **Considera a correspondência f representada pelo diagrama.**



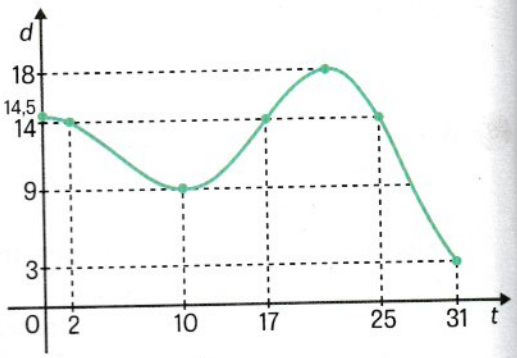
1.1. Justifica que f é uma função.

1.2. Indica o domínio, o contradomínio e o conjunto de chegada de f.

1.3. Há dois objetos com a mesma imagem. Identifica esses objetos e a respetiva imagem.

1.4. Identifica o objeto cuja imagem é um número irracional.

2 **No referencial ao lado está representada parte da função d que relaciona a distância, em metros, de um papagaio de papel ao solo durante 31 segundos.**



2.1. Indica o domínio e o contradomínio da função d.

2.2. Por observação do gráfico, indica os instantes em que o papagaio de papel se encontra a:

a) 14 metros do solo;

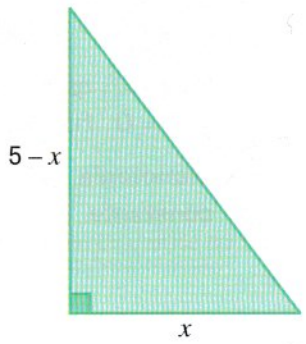
b) pelo menos 14 metros do solo;

c) menos de 14 metros do solo.

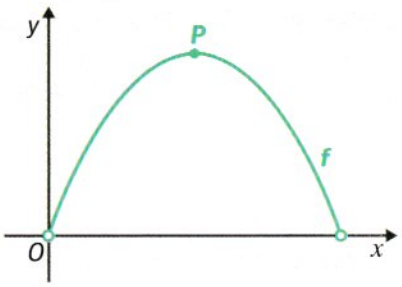
2.3. Em relação à equação $d(t) = k$, dá exemplo de um valor de k, de modo que a equação:

a) tenha uma só solução; **b)** tenha duas soluções; **c)** seja impossível.

3 **Na figura está representado um triângulo retângulo. Atendendo à informação dada, considera a função f que a cada valor de x faz corresponder a medida da área do triângulo.**



A seguir está representada graficamente a função f.



3.1. Determina o domínio da função f.

3.2. Sabe-se que o ponto P pertence ao gráfico de f e tem abcissa igual a $\frac{5}{2}$.
Determina as coordenadas do ponto P.

4 **Na figura está representado um cilindro, tal que:**

- a altura é igual ao quádruplo do raio da base;
- x representa a medida, em centímetros, do diâmetro da base;
- $x \in [4, 9]$.

Seja V a função que a cada x, em centímetros, faz corresponder o volume do cilindro, em centímetros cúbicos.

4.1. Mostra que $V(4) = 32\pi$.

4.2. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, resolve a equação $V(x) = 306$.
Apresenta o resultado arredondado às centésimas.

ESPMA10CAP © Porto Editora

Ficha 2.1.

Função afim

Deves ter presente que...

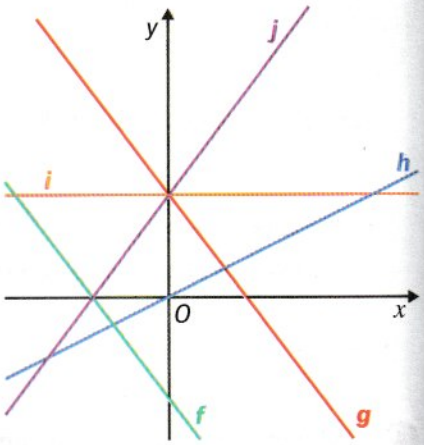
- Uma **função** f, de domínio $\mathbb{R}$, diz-se **afim** se existirem números reais a e b, tais que $f(x) = ax + b$.
- a: é o **declive da reta**; b: é a **ordenada na origem** (ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo Oy).
- Se $a \neq 0$, $-\frac{b}{a}$ é o **único zero** da função.
- Se $a = 0$, então $f(x) = b$, logo $D'_f = \{b\}$; se $b \neq 0$, f não tem zeros e o sinal de f é igual ao sinal de b; se $b = 0$, $f(x) = 0$ e a função tem uma infinidade de zeros.
- **Monotonia**: se $a > 0$, a função é **crescente**; se $a < 0$, a função é **decrescente**; se $a = 0$, a função é **constante**.

1 **Na figura estão representadas as funções f, g, h, i e j.**
A cada função faz corresponder a respetiva expressão analítica que faz parte do conjunto A.

A

$y = \frac{4}{3}x + 2$ $\quad y = -2x$ $\quad y = \frac{1}{2}x$ $\quad y = -\frac{4}{3}x - 2$

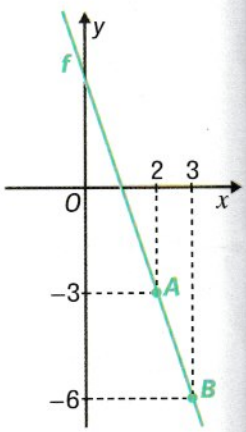
$y = 2$ $\quad y = -\frac{4}{3}x + 2$ $\quad y = 2x + \frac{4}{3}$



2 **Na figura está representada, graficamente, a função afim f. Os pontos A, B, C e D pertencem ao gráfico de f.**

Sabe-se que:

- $A(2, -3)$ e $B(3, -6)$
- o ponto C tem abcissa $-\frac{4}{3}$;
- o ponto D tem ordenada -5.



2.1. Representa a função f através de uma expressão.

2.2. Determina as coordenadas dos pontos C e D.

2.3. O ponto de coordenadas $\left(-\frac{1}{3}, 6\right)$ pertence ao gráfico de f? Justifica.

ESPMÁ IDCAF © Porto Editora

2.4. A reta, representação gráfica da função f, contém um ponto cuja ordenada é o dobro da abcissa. Determina as coordenadas desse ponto.

2.5. Sabe-se que os pontos de coordenadas $(1, 5)$ e $(0, 1)$ pertencem ao gráfico de uma função afim g. Determina as coordenadas do ponto de interseção dos gráficos de f e de g.

2.6. Determina a equação da reta paralela ao eixo Ox e que passa pelo ponto de abcissa 4 pertencente ao gráfico de f.

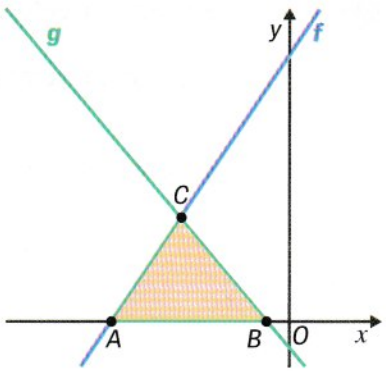
3 **Na figura estão representadas duas funções, f e g, tais que:**

$$f(x) = \frac{3}{2}x + 6 \text{ e } g(x) = -\frac{6}{5}x - \frac{3}{5}.$$

Sabe-se que:

- os pontos A e B são os zeros dos gráficos de f e g, respetivamente;
- C é o ponto de interseção dos gráficos de f e de g.

Determina a medida da área do triângulo $[ABC]$.



4 **Para um certo parâmetro real a, seja g a função definida por $g(x) = ax + 4$.**

Sabe-se que $-\frac{1}{3}$ é zero de g.

4.1. Determina o valor de a.

4.2. Elabora o quadro de sinais da função g.

5 **Seja j a função definida por $j(x) = -\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} + a^2\right)x$, sendo $a \in \mathbb{R}$. Indica, justificando, o valor lógico da afirmação:**

"j é crescente independentemente do valor do parâmetro a."

ESPMATIK AP © Porto Editora

Ficha 2.2. Função quadrática: transformações geométricas

Deves ter presente que...

- O gráfico de $y=-x^2$ resulta do gráfico de $y=x^2$ através de uma **reflexão** relativamente ao eixo Ox.
- Seja a um número real positivo e f a função definida por $f(x)=x^2$. O gráfico da função g, tal que $D_g=D_f$ e $g(x)=af(x)$, é a imagem do gráfico de f por uma:
  - **dilatação vertical** de coeficiente a se $a>1$;
  - **contração vertical** de coeficiente a se $0<a<1$.
- Dada a função f definida por $f(x)=x^2$: o gráfico da função definida por $f(x-h)$ é uma parábola de vértice no ponto $V(h, 0)$ e obtém-se, a partir do gráfico de f, aplicando-lhe a **translação horizontal** de vetor $\overrightarrow{OV}$; o gráfico da função definida por $f(x)+k$ é uma parábola de vértice no ponto $V(0, k)$ e obtém-se, a partir do gráfico de f, aplicando-lhe a **translação vertical** de vetor $\overrightarrow{OV}$.

1 **Considera a função f definida por $f(x)=\frac{1}{4}x^2$ e a parábola correspondente à sua representação gráfica.**

1.1. Indica as coordenadas do vértice da parábola e indica o seu eixo de simetria.

1.2. Indica o contradomínio da função f e elabora o respetivo quadro de sinais.

1.3. Elabora o quadro de variação da função f e indica os intervalos de monotonia.

1.4. Identifica as transformações geométricas que permitem obter o gráfico de f a partir do gráfico da função definida por $y=x^2$.

1.5. Representa, graficamente, o gráfico da função g que é imagem do gráfico de f por uma reflexão em relação ao eixo Ox.

1.6. Determina o valor de $f(-1)+g(-1)$, sendo g a função definida em **1.5.**.

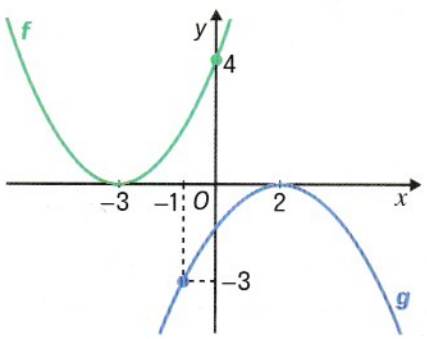
2 **Sejam f e g as funções definidas por $f(x) = ax^2$, em que $a \neq 0$ e $g(x) = -f(x)$.**
Sabe-se que o ponto de coordenadas $(-3, 6)$ pertence ao gráfico de g.

2.1. Determina o valor de a.

2.2. Determina a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) do gráfico de f de coordenadas $\left(x, -\frac{3}{2}\right)$.

3 **Seja h uma função quadrática definida por uma expressão do tipo $h(x) = ax^2$, $a > 0$. Sabendo que um ponto P pertence ao gráfico de h, tem abcissa igual ao dobro da ordenada e o produto das coordenadas é 8, determina o valor de a.**

4 **No referencial da figura estão representadas duas funções, f e g, da família $y = a(x - h)^2$, $a \neq 0$.**



4.1. Para cada função, indica o domínio e o contradomínio e constrói o quadro de variação, identificando os extremos.

4.2. Atendendo aos dados da figura, determina expressões que definam as funções f e g.

4.3. Descreve como se pode obter os gráficos de f a partir do gráfico da função definida por $y = x^2$.

ESPIMATOCAP © Porto Editora

5 **Da função i, definida por $i(x) = a(x - h)^2$, sabe-se que:**

- o seu gráfico tem como eixo de simetria a reta paralela a Oy que passa em $(\sqrt{3}, 0)$;
- o ponto de coordenadas $(0, 1)$ pertence ao gráfico de i.

5.1. Escreve uma expressão de $i(x)$.

5.2. Constrói o quadro de variação da função i e indica os intervalos de monotonia.

5.3. Qual dos seguintes pontos pertence ao gráfico de i?

(A) $(0, 4)$ **(B)** $(-\sqrt{3}, 4)$ **(C)** $(1, 0)$ **(D)** $(-\sqrt{3}, 0)$

6 **Seja f a função quadrática definida por uma expressão do tipo $f(x) = ax^2 + k$, $a \neq 0$. Sabe-se que a ordenada do vértice é 3 e o ponto $A(-2, -9)$ pertence ao gráfico da função.**

6.1. Qual é o contradomínio da função f?

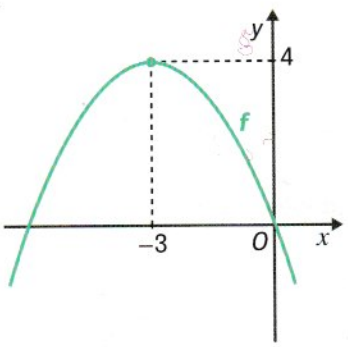
6.2. Elabora o quadro de variação da função f.

6.3. Escreve uma expressão de $f(x)$ e determina os zeros da função.

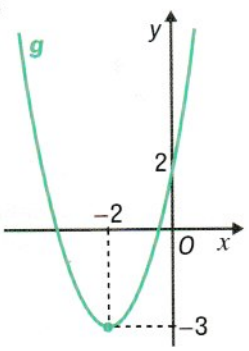
6.4. Elabora o quadro de sinais da função f e indica os intervalos de monotonia.

7 **Atendendo às representações gráficas seguintes, apresenta, em cada caso, uma expressão algébrica que defina a função.**

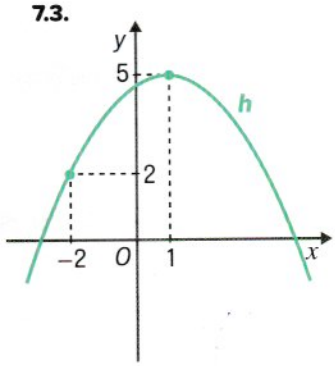
7.1.



7.2.



7.3.



ESPMA10CAP © Porto Editora

8 Seja g uma função quadrática. Sabe-se que 9 é o máximo de g e que o quadro de sinais da função é:

x	$-\infty$	-1		5	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

8.1. Identifica o eixo de simetria da parábola que representa graficamente a função e as coordenadas do vértice.

8.2. Faz um esboço da representação gráfica de g e indica, sem efetuar cálculos, o valor de $g(0) - g(4)$.

8.3. Considera o quadrilátero $[OABC]$, sendo A o ponto de interseção do gráfico de g com o eixo Oy, B um ponto do gráfico de g com a mesma ordenada do ponto A e C a projeção ortogonal do ponto B sobre Ox. Determina a medida da área do retângulo $[OABC]$.

9 **A representação gráfica de uma função f é uma parábola, cujo vértice é o ponto de coordenadas $(3, 2)$.**

Sabe-se que um dos seus zeros de f é 4.

Seleciona a opção que apresenta uma expressão analítica da função f.

(A) $f(x) = 2x^2 - 12x - 20$

(B) $f(x) = 2x^2 + 12x - 9$

(C) $f(x) = -2x^2 + 12x - 16$

(D) $f(x) = -2x^2 - 12x - 9$

10 **Sejam a, b e c três números reais. Considera a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$.**

Sabe-se que $a < 0$ e que a função f tem um único zero, o número real -3.

Qual é o contradomínio da função f?

(A) $[-3, +\infty[$ **(B)** $[0, +\infty[$ **(C)** $]-\infty, -3]$ **(D)** $]-\infty, 0]$

11 **Para cada valor real de c, a expressão $f(x) = -3x^2 + 4x + c$ define uma função f.**

Indica, justificando, o valor lógico de cada uma das seguintes afirmações:

(I) $f(2) < f\left(\frac{2}{3}\right)$ **(II)** Se $c = 1$, o contradomínio de f é $]-\infty, 2]$. **(III)** Se $x < \frac{2}{3}$, então $f(x) < f\left(\frac{2}{3}\right)$.

ESPMA10CAP © Porto Editora

Ficha 2.3.

Equações e inequações do 2.° grau

Deves ter presente que...

- Dada uma equação do tipo $ax^2+bx+c=0$, em que $a\neq 0$:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \longrightarrow \textbf{Fórmula resolvente}$$

O **número de soluções** da equação depende do sinal de Δ, sendo $\Delta=b^2-4ac$.

- Se $\Delta>0$, a equação tem **duas** soluções.
- Se $\Delta=0$, a equação tem **uma** solução.
- Se $\Delta<0$, a equação **não tem** soluções (equação impossível).
- Seja f uma função definida por $f(x)=ax^2+bx+c=0$, em que $a\neq 0$.
  Para resolver uma inequação do tipo $f(x)>0$, $f(x)<0$, $f(x)\geqslant 0$ ou $f(x)\leqslant 0$, estuda-se o sinal da função f, começando por determinar os seus zeros.

1 **Para cada uma das equações, indica o número de soluções, recorrendo ao binómio discriminante.**

1.1. $x^2+3x-5=0$

1.2. $2x^2=-\frac{1}{2}x-1$

1.3. $-\frac{1}{6}(3x^2+3)=x$

1.4. $3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=-\frac{x(2-x)}{3}$

2 **Seja f a função definida por $f(x)=\frac{1}{2}x^2+kx+2-x$.**

2.1. Determina os valores de k, de modo que a função f tenha um e um só zero.

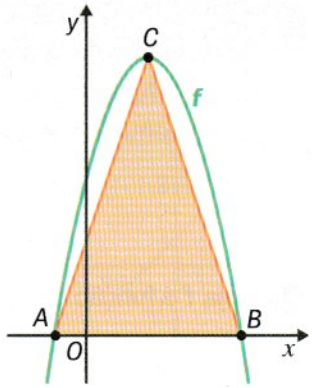
2.2. Considera $k=-3$.

a) Determina os zeros da função f.

b) Constrói o quadro de sinais de f.

c) Determina as coordenadas do(s) ponto(s) do gráfico de f que têm ordenada -6. O que podes concluir quanto à(s) solução(ões) obtida(s)?

3 **No referencial o.n. *Oxy* da figura está representada a função *f* definida por $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ e o triângulo isósceles [*ABC*].**



3.1. Indica as coordenadas dos pontos *A* e *B*.

3.2. Indica o contradomínio da função *f*.

3.3. Determina a medida da área do triângulo [*ABC*].

4 **Resolve cada uma das inequações.**

4.1. $x^2 - 16 > 0$ **4.2.** $x^2 - 2x \leqslant 0$ **4.3.** $2x^2 + x + 1 < 0$

4.4. $4x^2 + 4x + 1 > 0$ **4.5.** $-(x-2)^2 + 6x \leqslant 24$ **4.6.** $3x - x^2 > 18 - 6x$

5 **Relativamente a uma função quadrática *f*, sabe-se que -6 e 2 são os seus zeros e que 32 é o máximo.**

5.1. Determina uma expressão analítica da função *f*.

5.2. Determina o conjunto dos valores de x para os quais:

a) $f(x) \geqslant 0$ **b)** $f(x) < 14$

ESPMA10CAP © Porto Editora

Ficha 3.1.

Funções definidas por ramos: definição analítica

Deves ter presente que...

Uma **função** está **definida por ramos** quando é definida por expressões algébricas diferentes, em partes do domínio diferentes.

ESPAÇO LOCAL © Porto Editora

1 **Seja f a função definida analiticamente por:** $f(x)=\begin{cases}2x-3 & \text{se } 0 \leqslant x<2 \\ -3x+1 & \text{se } -3 \leqslant x<0\end{cases}$.

1.1. Indica o domínio de f.

1.2. Determina:

a) $f(-2)$ **b)** $f(0)$ **c)** $f\left(\frac{1}{2}\right)$

1.3. Representa f graficamente.

1.4. Indica o contradomínio de f.

2 **Numa cidade, o preço a pagar por mês pelo consumo de água é a soma das seguintes parcelas:**

- 3,72 € pela tarifa fixa;
- 0,71 € por cada metro cúbico de água consumido até 20 m^3, inclusive;
- 2,84 € por cada metro cúbico de água consumido para além de 20 m^3.

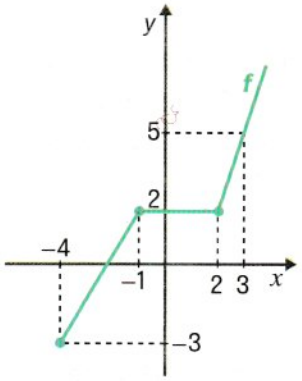
2.1. Determina o preço a pagar pelo consumo de água igual a:

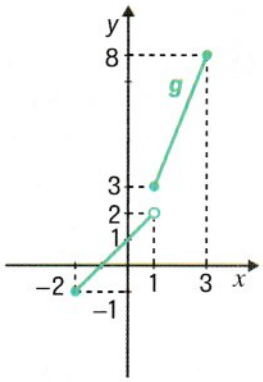
a) 10 m^3

b) 25 m^3

2.2. Define, analiticamente, a função que traduz o preço, p, a pagar, em euros, em função do número de metros cúbicos de água consumidos, x.

3 **Nos referenciais das figuras estão representadas duas funções f e g.**





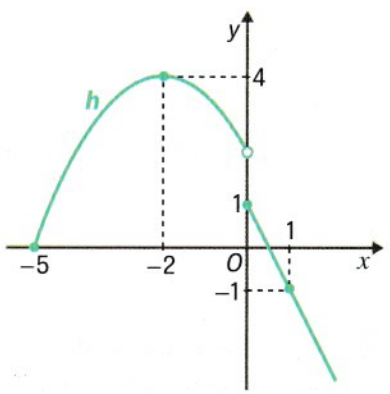
3.1. Indica o domínio e o contradomínio de cada uma das funções.

3.2. Define, por ramos, as funções f e g.

3.3. Determina o valor de $f\left(-\frac{5}{3}\right)$ e $g\left(\frac{3}{2}\right)$.

3.4. Indica o número de soluções da equação $g(x)=\frac{5}{2}$.

4 **Na figura está uma representação gráfica da função h constituída por parte de uma reta e de uma parábola de vértice $(-2, 4)$.**



4.1. Identifica o domínio e o contradomínio de h.

4.2. Dá exemplo de um valor de k, de modo que a equação $f(x)=k$:

a) seja impossível;

b) tenha uma só solução;

c) tenha exatamente duas soluções.

4.3. Define a função h por ramos.

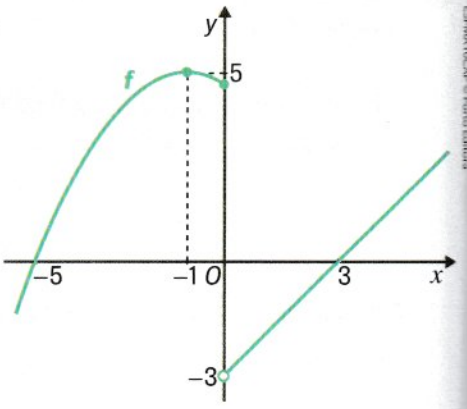
4.4. Calcula $h(-5)-h(0)\times h(1)-h(\pi)$.

ESPMA10CAP © Porto Editora

Ficha 3.2.

Estudo de funções definidas por ramos

1 **A função f, de domínio $\mathbb{R}$, representada graficamente no referencial da figura, é constituída por parte de uma parábola e de uma reta.**



1.1. Determina as coordenadas do ponto de interseção do gráfico de f com o eixo das ordenadas.

1.2. Elabora o quadro de sinais da função f.

1.3. Indica o conjunto-solução da inequação $f(x) \leqslant 0$.

1.4. Determina o conjunto-solução da inequação $f(x) \geqslant 5$.

2 **Seja g a função definida por:** $g(x) = \begin{cases} -2x + 12 & \text{se } x < -4 \\ 3x - \frac{1}{3} & \text{se } -4 \leqslant x < 3 \\ 32 - 2x^2 & \text{se } 3 \leqslant x \leqslant 9 \end{cases}$

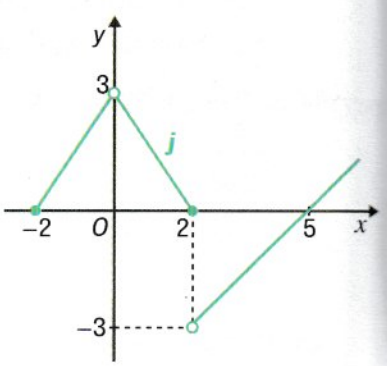
2.1. Indica o domínio da função g.

2.2. Determina, caso existam:

a) os zeros da função g;

b) o(s) objeto(s) cuja imagem por g é 14.

3 **A representação gráfica da função j é constituída por parte de uma reta e por dois segmentos de reta.**



3.1. Indica o domínio e o contradomínio de j.

3.2. Constrói o quadro de sinais da função j.

3.3. Dada a equação $j(x) = b$, indica todos os possíveis valores de b, para os quais a equação:

a) é impossível;

b) tem três soluções;

c) tem uma solução.

4 **Considera a função h definida por:** $h(x) = \begin{cases} -x^2 + 9 & \text{se } x \leqslant 2 \\ -4x + 8 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

4.1. Determina as coordenadas do ponto de interseção do gráfico de h com os eixos coordenados.

4.2. Faz um esboço do gráfico da função h.

4.3. Indica o contradomínio da função h.

4.4. Determina, caso existam, os objetos cuja imagem por h é -2.

5 **O Alfredo é agente imobiliário e o seu vencimento mensal ilíquido depende do valor das vendas efetuadas nesse mês. Admite que o vencimento ilíquido é o seguinte:**

- Salário mínimo fixo: 820 €;
- 3% do valor das vendas efetuadas até 120 000 €;
- 4% do valor das vendas que exceder 120 000 €.

Seja v a função que ao valor de x, em euros, das vendas, faz corresponder o vencimento ilíquido mensal, em euros, $v(x)$.

5.1. Define a função v por ramos.

5.2. Determina $v(115\,000)$ e indica o significado no contexto apresentado.

5.3. Para o vencimento ilíquido ser superior a 6000 €, o valor das vendas dos imóveis deve ser superior a um valor k. Determina o valor de k.

ESPMA10CAP © Porto Editora

Ficha 3.3.

Função módulo: definição analítica

Deves ter presente que...

- Sendo P um ponto da reta real de abcissa x, o valor **absoluto** (ou **módulo**) de x, representa-se por $|x|$, e é tal que $|x| = \overline{PO}$, sendo O a origem.
  - $|x| = x$, se $x \geqslant 0$.
  - $|x| = -x$, se $x < 0$.
- Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, que a cada número real x faz corresponder o seu módulo, ou seja,

$f(x) = |x|$, sendo:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

1 Seja f a função definida por $f(x) = -4|x| + 2$.

1.1. Determina o valor de:

a) $f(-3)$ **b)** $f\left(\frac{1}{3}\right)$ **c)** $f\left(-\frac{3}{2}\right)$

1.2. Usando as potencialidades gráficas da calculadora, determina as coordenadas dos pontos de interseção do gráfico de f com o da função g definida por $g(x) = |x|$.

2 Define a função f por ramos se:

2.1. $f(x) = |x - 6|$ **2.2.** $f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$ **2.3.** $f(x) = |-3x + 5|$

2.4. $f(x) = -\left|x + \frac{2}{3}\right|$ **2.5.** $f(x) = |4x - 1| - 3$

3 Considera a função h definida por $h(x) = |x + 5|$.

3.1. Define a função h por ramos.

3.2. Representa graficamente a função h.

3.3. Indica o domínio e o contradomínio de h.

4 **Considera a função j, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $j(x) = -\left|x - \frac{3}{2}\right| - 2$.**

4.1. Define a função j por ramos.

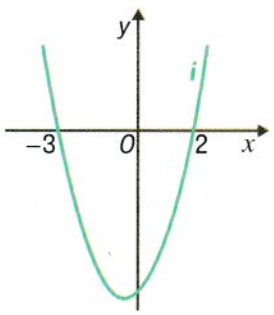
4.2. Determina, analiticamente, caso existam, os zeros de j.

4.3. Verifica se -1 pertence ao contradomínio da função j.

5 **Na figura está representada a função i definida por $i(x) = x^2 + x - 6$.**

Seja f a função definida por $f(x) = |i(x)|$.

5.1. Representa graficamente a função f.



5.2. Define a função f por ramos.

6 **Considera, num referencial, as representações gráficas das funções f e g, definidas por:**

$$f(x) = -\frac{1}{2}|x| + 1 \text{ e } g(x) = x^2 - 4$$

Determina as abcissas dos pontos de interseção dos dois gráficos.

Sugestão: Começa por definir f por ramos.

ESPMAT 10CAP © Porto Editora

Ficha 1.1. Referenciais cartesianos no plano

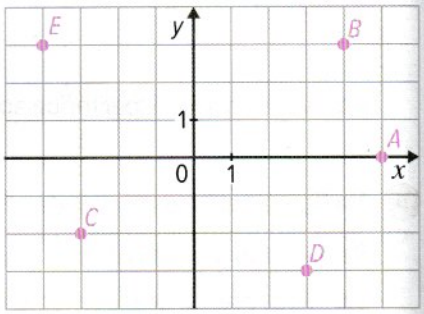
Deves ter presente que...

- A cada ponto P do plano corresponde um e um só par ordenado de números reais, (a, b), e, inversamente, a cada par ordenado de números reais corresponde um e um só ponto do plano. O conjunto de todos os pares ordenados de números reais (a, b) representa-se por: $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) : a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}$$

- Um referencial cartesiano Oxy diz-se **ortogonal monométrico** (o.m.) se:
  - os eixos Ox e Oy são perpendiculares (**referencial ortogonal**);
  - as unidades de comprimento definidas para cada eixo são iguais (**referencial monométrico**).

1 **Observa a figura ao lado.**



1.1. Indica as coordenadas dos pontos A, B, C, D e E.

1.2. Dos pontos assinalados, há apenas um em que as coordenadas são números simétricos. Identifica-o.

1.3. Identifica a mediatriz do segmento de reta $[EB]$.

1.4. Indica as coordenadas de um ponto P que resulta de uma reflexão de:

a) C em relação ao eixo Ox;

b) D em relação ao eixo Oy.

1.5. Indica as coordenadas do ponto T, sabendo que pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à de D.

2 **Sejam $A(2 - 3k, -4)$ e $B(k^2 - 9, 2)$, com $k \in \mathbb{R}$, dois pontos representados num referencial o.m. Oxy.**

Determina o(s) valor(es) de k para o(s) qual(ais):

2.1. o ponto B pertence ao eixo das ordenadas;

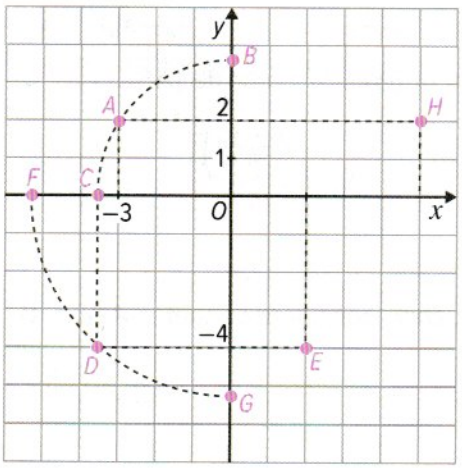
2.2. o ponto A pertence ao 3.º quadrante;

2.3. o ponto B pertence ao 4.º quadrante.

ESPAÇO DE © Porto Editora

3 **Para cada ponto representado no referencial o.m. Oxy, indica as respetivas coordenadas.**

Sabe-se que os pontos A, B e C estão sobre a mesma circunferência de centro O e os pontos D, F e G estão sobre uma outra circunferência, também de centro O.



4 **Num referencial o.m. Oxy, para $t \in \mathbb{R}$, considera os pontos:**

$$A\left(-\frac{t}{2}, -3\right) \text{ e } B\left(-\frac{3-t}{4}, 2-t\right)$$

4.1. Considera $t = -2$ e indica o quadrante a que pertence cada um dos pontos.

4.2. Determina para que valores de t o ponto B pertence ao 3.º quadrante ou ao 4.º quadrante.

4.3. Considera $t = -5$ e indica as coordenadas do transformado do:

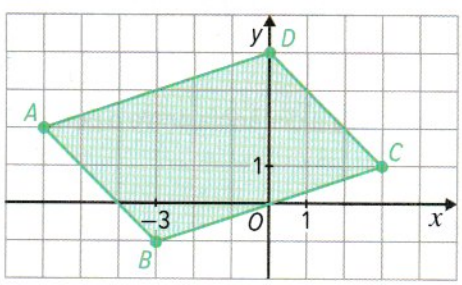
a) ponto A pela reflexão de eixo Oy;

b) ponto B por meia-volta de centro O.

5 **No referencial o.m. Oxy está representado um quadrilátero $[ABCD]$.**

Determina a medida da área do triângulo $[PQR]$, sabendo que:

- P é o transformado de C por meia-volta de centro O;
- Q é o transformado de D pela reflexão cujo eixo é a reta que passa por C e é paralela ao eixo Ox.
- R é o transformado de B pela reflexão de eixo Oy;



ESPMA10CAP © Porto Editora

Ficha 1.2.

Distância entre dois pontos no plano

Deves ter presente que...

- Sejam os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. A **distância entre *A* e *B*** é dada por:

$$d(A, B) = \overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

- Sejam $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e M o **ponto médio de [*AB*]**.

  As coordenadas do ponto M são $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

1 **Em relação a um referencial o.m. *Oxy*, considera os pontos $A(2, -1)$, $B(-3, 4)$ e $C(-2, 0)$.**

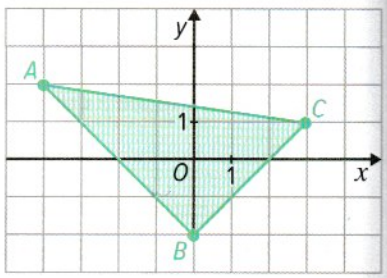
1.1. Determina:

a) $\overline{OA}$

b) $\overline{AB}$

1.2. Mostra que o ponto C é equidistante dos pontos A e B.

2 **Na figura está representado o triângulo [*ABC*], sendo $A(-4, 2)$, $B(0, -2)$ e $C(3, 1)$. Classifica-o quanto aos lados e quanto aos ângulos.**



3 **Em relação a um referencial o.m. *Oxy*, considera os pontos $A(4, -3)$, $B(-2, 5)$ e $C(-1, -2)$.**

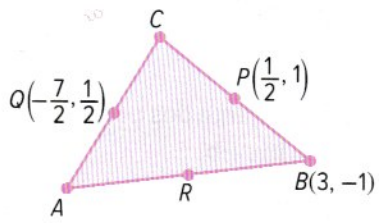
3.1. Determina:

a) as coordenadas do ponto médio, M, de $[AB]$;

b) a distância entre o ponto C e o ponto médio do segmento de reta $[CM]$.

3.2. Classifica o triângulo $[ABC]$ quanto aos lados.

4 **Na figura estão representados um triângulo $[ABC]$ e os pontos médios dos seus lados, P, Q e R.**



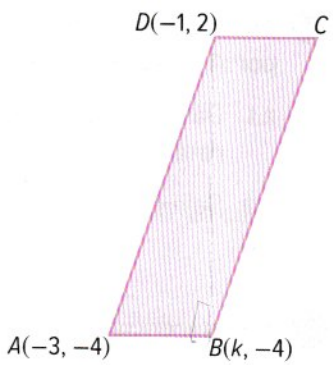
Sabe-se que $B(3, -1)$, $P\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ e $Q\left(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Determina:

4.1. as coordenadas dos pontos A, C e R;

4.2. um valor, arredondado às centésimas, da medida do perímetro do triângulo $[ABC]$;

4.3. o valor de k, de modo que $\left(\frac{-k-1}{2}, k^2 - \frac{13}{4}\right)$ seja o ponto médio de $[QP]$.

5 **Na figura está representado um paralelogramo $[ABCD]$.**



5.1. Determina o valor de k, de modo que o triângulo $[ABD]$ seja retângulo em B.

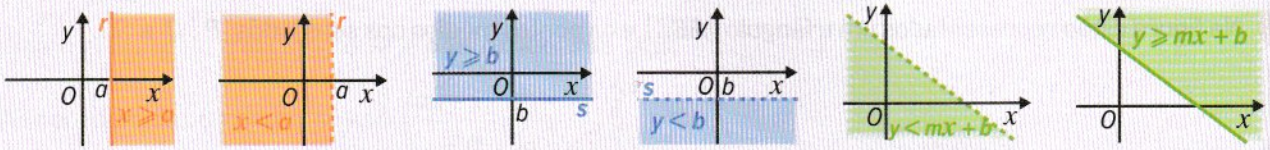
5.2. Para $k = 1$, determina as coordenadas do ponto C.

ESPMATOCAP © Porto Editora

Ficha 1.3. Conjuntos de pontos do plano definidos por condições

Deves ter presente que...

- O **declive**, m, da reta que passa nos pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, sendo $x_A \neq x_B$, é: $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
- **Semiplanos**:



- **Mediatriz do segmento de reta** $[AB]$: conjunto dos pontos $P(x, y)$ do plano que são equidistantes de A e de B, ou seja: $\overline{PA} = \overline{PB} \iff y = mx + b$
- Em relação a um referencial o.m. Oxy, dado um ponto $C(a, b)$ e um número real positivo r:
  - a **circunferência de centro C e raio r** é definida pela equação:

    $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ (**equação reduzida** da circunferência)
  - o **círculo de centro C e raio r** é definido pela inequação: $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leqslant r^2$

1 Em relação a um referencial o.m. Oxy, considera os pontos $A(4, -3)$, $B(-\sqrt{2}, 2)$ e $C(\pi, 2)$.

1.1. Escreve uma equação da reta que passa no ponto B e é paralela ao:

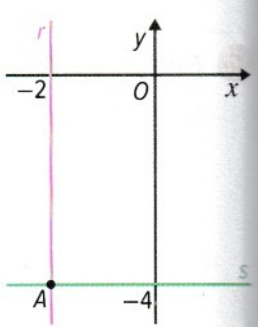
a) eixo Oy; **b)** eixo Ox.

1.2. Determina as coordenadas do ponto de interseção da reta paralela ao eixo Ox e que passa no ponto A com a reta paralela ao eixo Oy e que passa no ponto C.

1.3. Dos pontos dados, existem dois que pertencem a uma reta paralela a um dos eixos coordenados. Identifica-os, justificando, e indica a equação da reta.

1.4. Indica todos os pontos de coordenadas inteiras que pertencem ao segmento de reta $[BC]$.

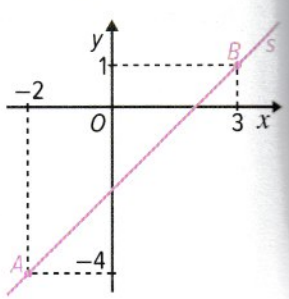
2 No referencial o.m. Oxy, considera o ponto $A(-2, -4)$ e as retas s e r que passam por A e são paralelas aos eixos Ox e Oy, respetivamente.



2.1. Dá exemplo das coordenadas de um ponto P do 4.º quadrante que pertença à reta s.

2.2. Seja $Q(k^2 - 11, 4 - k)$. Para que valores de k, o ponto Q pertence à reta r?

3 No referencial o.m. Oxy está representada a reta s.

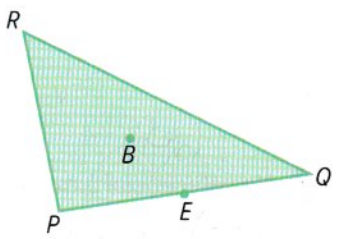


3.1. Escreve a equação reduzida da reta, r, paralela à reta s e que passa pelo ponto C, sendo C a projeção ortogonal do ponto A sobre a reta de equação $y = 2$.

3.2. Determina a equação reduzida da reta que contém a mediana de vértice C do triângulo $[ABC]$.

4 **Na figura estão representados um triângulo $[PQR]$ e o ponto B, seu baricentro. Em relação a um referencial o.m. Oxy, sabe-se que:**

- o ponto B tem coordenadas $(-1, 0)$;
- o ponto E é o ponto médio de $[PQ]$ e tem coordenadas $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$;
- o ponto P tem coordenadas $(-3, -2)$.



4.1. Determina as coordenadas do ponto Q.

4.2. Determina $\overline{PF}$, sabendo que F representa o ponto médio de $[QR]$.

4.3. Determina, na forma reduzida, uma equação da reta RE.

5 **Representa, num referencial o.m. Oxy, o conjunto de pontos $P(x, y)$ que satisfazem cada uma das condições.**

5.1. $y < 2x + 5$

5.2. $y \geqslant -x + 4$

6 **Num referencial o.m. Oxy, considera os pontos $A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $B\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$ e $C\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.**

6.1. Escreve a equação reduzida da reta AB.

6.2. Representa, por uma inequação, na forma reduzida, o semiplano fechado definido pela reta AB ao qual pertence o ponto C.

6.3. Verifica a que semiplano aberto determinado pela reta AB pertence o ponto P de coordenadas:

a) $\left(\frac{1}{4}, 3\right)$

b) $\left(-1, -\frac{5}{4}\right)$

DOMAIO AP © Porto Editora

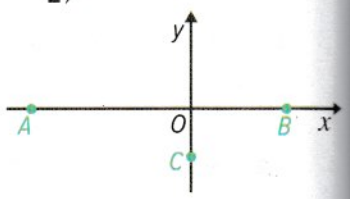
6.4. Seja M o ponto médio do segmento de reta $[AC]$.

a) Representa, por uma inequação, na forma reduzida, o semiplano inferior aberto definido pela reta BM.

b) Verifica a que semiplano determinado pela reta BM pertence o ponto R de coordenadas $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$.

7 **No referencial o.m. Oxy estão representados os pontos $A(-5, 0)$, $B(3, 0)$ e $C\left(0, -\frac{3}{2}\right)$.**

Define por uma equação a mediatriz do segmento de reta:



7.1. $[AB]$

7.2. $[OC]$

7.3. $[BC]$

8 **Na figura está representado o lado $[PQ]$ de um triângulo isósceles $[PQR]$, sendo $\overline{PR} = \overline{QR}$.**

Em relação a um referencial o.m. Oxy, sabe-se que:

- as coordenadas dos pontos P e Q são, respetivamente, $P(-2, 3)$ e $Q(3, -4)$;
- a ordenada do ponto R é -3.

8.1. Determina as coordenadas do ponto R.

8.2. Determina a medida da área do triângulo $[PQR]$.

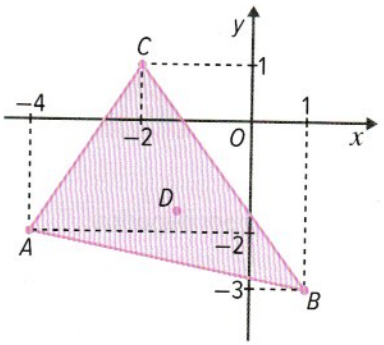
9 **Em relação a um referencial o.m. Oxy, considera o ponto $A(-3, -5)$.**

Representa, por uma inequação, o semiplano fechado definido pela mediatriz de $[AO]$, ao qual pertence o ponto A', sabendo que A' é a imagem do ponto A obtida pela reflexão de eixo Ox.

10 **No referencial o.m. Oxy está representado o triângulo $[ABC]$, sendo $A(-4, -2)$, $B(1, -3)$ e $C(-2, 1)$.**

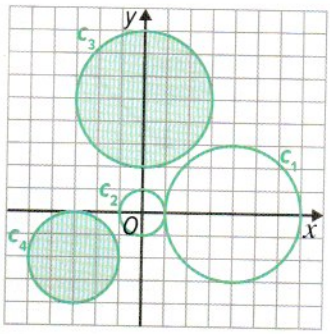
O ponto D é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$.

Determina as coordenadas do ponto D.



11 **Considera o referencial o.m. Oxy da figura.**

Representa as circunferências por uma equação e os círculos por uma inequação, todas na forma reduzida, considerando, para unidade de medida, o lado de cada quadrícula.

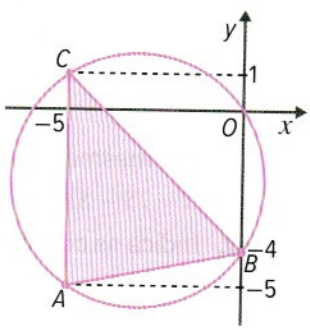


12 **Num referencial o.m. Oxy, os pontos de interseção da reta definida pela equação $y = -2x + 4$ com os eixos coordenados são extremos de um diâmetro de uma circunferência.**

Determina a equação, na forma reduzida, dessa circunferência.

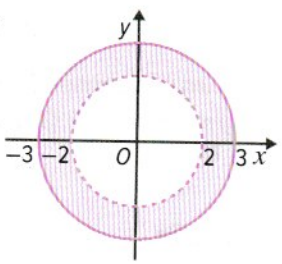
13 **No referencial o.m. Oxy, o triângulo $[ABC]$ está inscrito numa circunferência, sendo $A(-5, -5)$, $B(0, -4)$ e $C(-5, 1)$.**

Determina a equação reduzida da circunferência circunscrita ao triângulo.

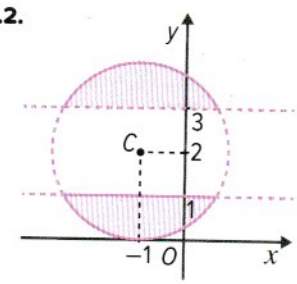


14 **Define, por uma condição, o conjunto de pontos que formam a região colorida.**

14.1.



14.2.



ESPMA10CAP © Porto Editora

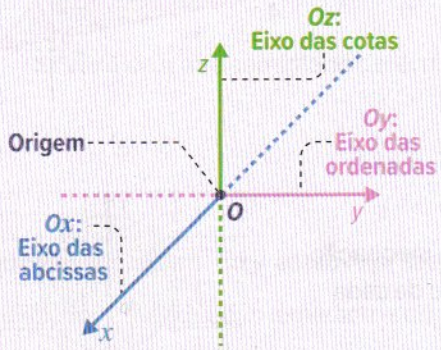
Ficha 2.1.

Referenciais cartesianos no espaço

Deves ter presente que...

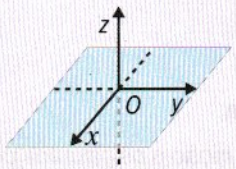
Referenciais cartesianos no espaço

Eixos coordenados

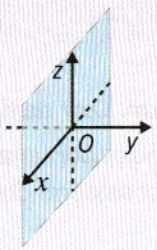


Planos coordenados no espaço

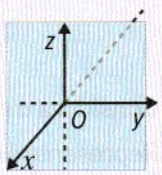
Plano xOy: $z=0$



Plano xOz: $y=0$



Plano yOz: $x=0$

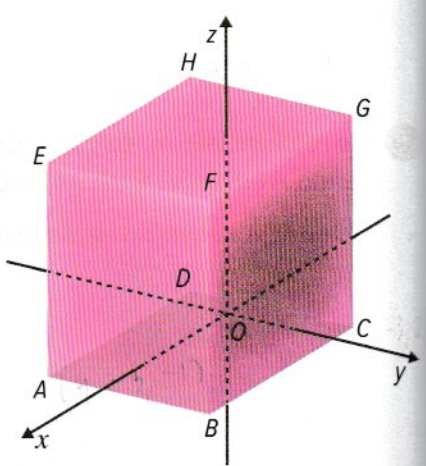


$P(x, y, z)$ pertence ao:	Condição
1.º octante	$x>0 \wedge y>0 \wedge z>0$
2.º octante	$x<0 \wedge y>0 \wedge z>0$
3.º octante	$x<0 \wedge y<0 \wedge z>0$
4.º octante	$x>0 \wedge y<0 \wedge z>0$

$P(x, y, z)$ pertence ao:	Condição
5.º octante	$x>0 \wedge y>0 \wedge z<0$
6.º octante	$x<0 \wedge y>0 \wedge z<0$
7.º octante	$x<0 \wedge y<0 \wedge z<0$
8.º octante	$x>0 \wedge y<0 \wedge z<0$

1 **Na figura está representado, num referencial o.m. *Oxyz*, um paralelepípedo retângulo *[ABCDEFGH]*.**

Sabe-se que $A(4, -3, -1)$, $C(-3, 2, -1)$ e $H(-3, -3, 5)$.



1.1. Dos vértices do sólido, indica os que têm:

a) a mesma abcissa;

b) a mesma ordenada;

c) a mesma cota.

1.2. Indica as coordenadas dos restantes vértices do paralelepípedo.

2 **Num referencial o.m. *Oxyz*, considera os pontos:**

$A(0, 0, \sqrt{2})$; $B(-2, -3, 0)$; $C(-\sqrt{3}, 0, 5)$; $D\left(-\frac{3}{2}, 0, 0\right)$;

$E(0, -2, -4)$; $F(0, -\pi, 0)$; $G(2, -3, -2)$ e $H(5, 3, 1)$

Indica um ponto que pertença ao:

2.1. eixo Ox;

2.2. plano xOy;

2.3. eixo Oy;

2.4. plano yOz;

2.5. eixo Oz;

2.6. plano xOz.

3 **Num referencial o.m. *Oxyz* está representado o ponto $P(2-k, 0, 3k+1)$, $k \in \mathbb{R}$.**

Determina as coordenadas do ponto P, de modo que pertença ao:

3.1. eixo Ox;

3.2. eixo Oz.

4 **Num referencial o.m. *Oxyz* está representado o ponto $Q(k^2-9, 2, k-3)$, $k \in \mathbb{R}$.**

Determina os valores de k, de modo que o ponto Q pertença ao:

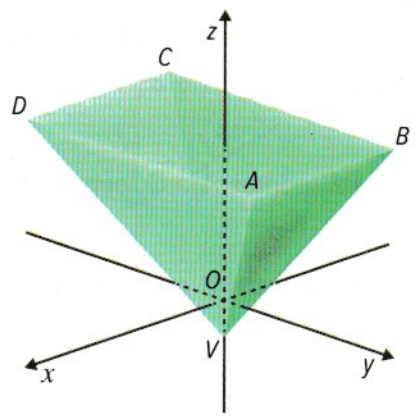
4.1. eixo Oy;

4.2. plano yOz.

5 **No referencial o.m. *Oxyz* está representada a pirâmide [*ABCDV*], cuja base é um retângulo paralelo ao plano xOy.**

Sabe-se que:

- $V(0, 0, -1)$, $A(2, 3, 4)$ e $C(-3, -5, 4)$
- a reta CD é paralela ao eixo Ox.



5.1. Indica as coordenadas dos vértices B e D da pirâmide.

5.2. Indica as coordenadas da projeção ortogonal do:

a) ponto V sobre o plano xOy;

b) ponto C sobre o plano yOz;

c) ponto D sobre o plano xOz.

5.3. Escreve uma equação do plano que contém a base da pirâmide.

6 **Em relação a um referencial o.m. *Oxyz*, considera o ponto P cujas coordenadas são do tipo $(k-2, -1, 5-3k)$, com $k \in \mathbb{R}$.**

6.1. Indica o octante a que pertence o ponto se $k = -2$.

6.2. Determina para que valores de k o ponto pertence ao 7.º octante.

7 **Num referencial o.m. *Oxyz* está representado o ponto $Q(2-a, a, a-3)$. A que octante pode pertencer o ponto Q se a cota for igual a metade do produto da ordenada pela abcissa?**

ESPMA10CAP © Porto Editora

Ficha 2.2.

Distância entre dois pontos no espaço

Deves ter presente que...

Sejam A e B dois pontos do espaço, tais que $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$.

- A **distância entre A e B** é dada por:

$$d(A, B) = \overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

- As coordenadas de M, **ponto médio do segmento de reta $[AB]$**, são dadas por:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

1 **Em relação a um referencial o.m. $Oxyz$, considera os pontos $A(3, -2, 1)$ e $B(-4, 5, -3)$.**

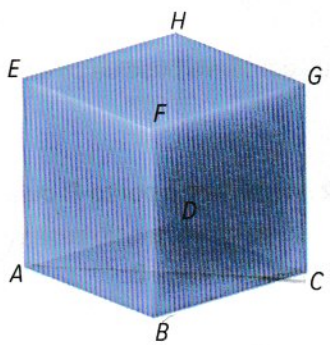
Determina a distância entre os:

1.1. pontos A e B;

1.2. pontos A e C, sendo C a projeção ortogonal de B sobre o eixo Oz;

1.3. pontos B e D, sendo D a projeção ortogonal de A sobre o plano yOz.

2 **Na figura está representado um cubo $[ABCDEFGH]$. Em relação a um referencial o.m. $Oxyz$, sabe-se que as coordenadas dos pontos A e C são, respetivamente, $(3, -4, -1)$ e $(-5, 4, -1)$.**



2.1. Determina a medida do comprimento da aresta do cubo.

2.2. Sabe-se que o plano que contém a face $[ABCD]$ é paralelo ao plano xOy. Assim, os vértices E, F, G e H têm uma coordenada comum. Indica qual é essa coordenada e o seu valor.

3 **Num referencial o.m. *Oxyz*, considera os pontos:**

$$A(-3, 4, -2) \ ; \ B(7, -5, 0) \ \text{ e } \ C(-1, -3, 2)$$

Determina as coordenadas do:

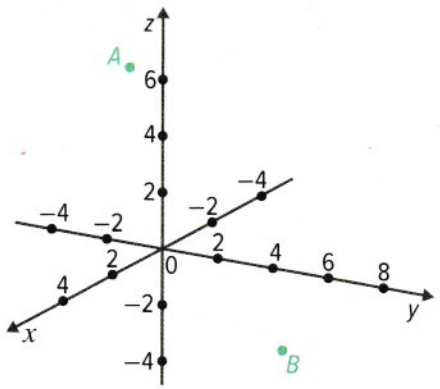
3.1. ponto médio do segmento de reta $[AB]$;

3.2. ponto D, sabendo que C é o ponto médio de $[AD]$.

4 **Num referencial o.m. *Oxyz*, considera os pontos $A(-2, -3, 5)$ e $B(3, 7, -1)$.**

4.1. Indica os octantes a que pertencem A e B.

4.2. Seja M o ponto médio de $[AB]$. Determina $\overline{OM}$.



4.3. Seja C um ponto do eixo Oy de ordenada negativa. Sabendo que $\overline{AC} = \sqrt{45}$, determina as coordenadas do ponto C.

5 **Em relação a um referencial o.m. *Oxyz*, considera os pontos:**

$$A(-2, -3, 2) \ ; \ B(-4, 1, 5) \ \text{ e } \ C(-6, 3, 6)$$

Sabe-se que:

- o ponto A' é o ponto do plano xOz mais próximo de A;
- o ponto B' é o ponto do plano yOz mais próximo de B.

5.1. Mostra que o triângulo $[A'B'C]$ é isósceles.

5.2. Determina a medida da área do triângulo $[A'B'C]$.

ESPMA10CAP © Porto Editora

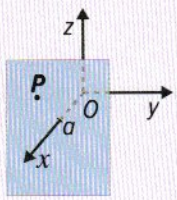
Ficha 2.3. Conjuntos de pontos do espaço definidos por condições

Deves ter presente que...

Conjuntos de pontos do espaço

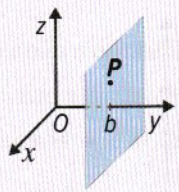
Plano paralelo a yOz:

$x = a$



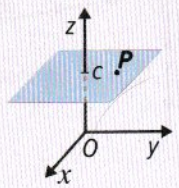
Plano paralelo a xOz:

$y = b$



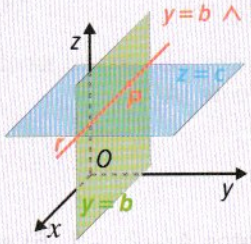
Plano paralelo a xOy

$z = c$

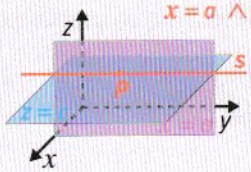


Retas paralelas aos eixos coordenados

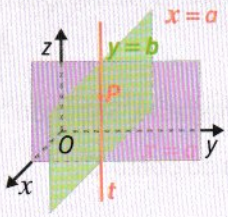
$y = b \wedge z = c$



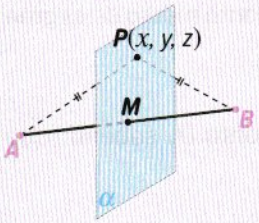
$x = a \wedge z = c$



$x = a \wedge y = b$



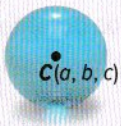
Plano mediador de $[AB]$



$\overline{PA} = \overline{PB} \iff ax + by + cz + d = 0$

Superfície esférica

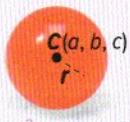
Seja $r > 0$.



$\overline{PC} = r \iff (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

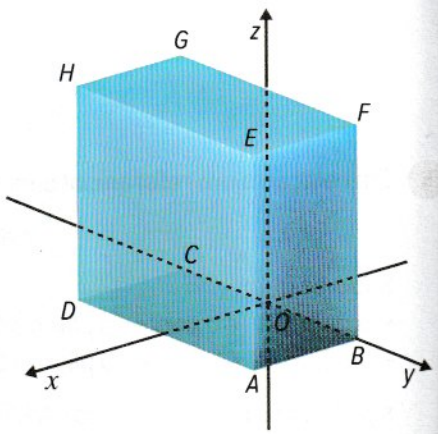
Esfera

Seja $r > 0$.



$\overline{PC} \leqslant r \iff (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leqslant r^2$

1 **Na figura está representado um prisma quadrangular $[ABCDEFGH]$ reto.**



Em relação ao referencial o.m. $Oxyz$, sabe-se que:

- a face $[ABCD]$ está contida no plano xOy;
- a origem do referencial coincide com o ponto médio da aresta $[BC]$;
- $A(3, 3, 0)$ e $F(0, 3, 5)$.

1.1. Determina as coordenadas dos pontos B, C, D, E, G e H.

1.2. Representa, por uma equação, o plano que:

a) contém a face $[DCGH]$;

b) contém a face $[AEHD]$;

c) passa no ponto $P(-1, -1, -2)$ e é paralelo ao plano que contém a face $[EFGH]$.

1.3. Representa, por um sistema de equações, a reta que contém a:

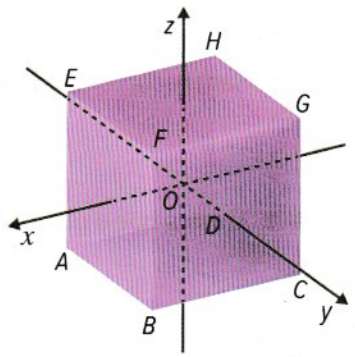
a) aresta $[EF]$;

b) aresta $[HE]$;

c) aresta $[CG]$.

ESPMAT10CAP © Porto Editora

2 **No referencial o.m. *Oxyz* está representado um cubo, tal que:**
- atendendo à unidade do referencial, a medida do volume do cubo é 216;
- a origem do referencial coincide com o centro do cubo;
- os eixos intersetam as faces nos seus centros.



2.1. Determina as coordenadas dos vértices do cubo.

2.2. Define, através de uma equação:

a) o plano BCG;

b) o plano que contém a face $[ABCD]$.

2.3. Define, por uma condição:

a) a reta HG;

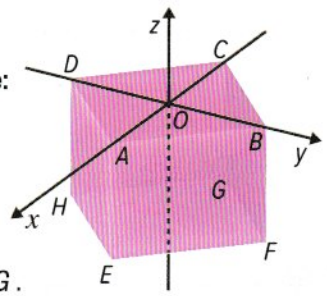
b) o segmento de reta $[EH]$.

2.4. Dá exemplo das coordenadas de um ponto P que pertença:

a) à face $[CDHG]$ e não pertença a qualquer outra face;

b) à aresta $[AD]$ e não seja vértice do cubo.

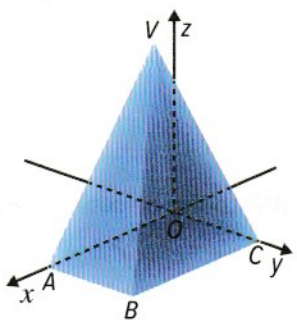
3 **No referencial o.m. *Oxyz* está representado um prisma quadrangular regular, tal que:**
- a face $[ABCD]$ está contida no plano xOy;
- a origem do referencial coincide com o centro da face $[ABCD]$;
- os vértices A e C pertencem ao eixo Ox;
- o perímetro da base é 40 e o volume do prisma é 800.



3.1. Representa, por uma equação, o plano que passa em D e é paralelo ao plano ACG.

3.2. Determina as coordenadas do ponto de interseção do eixo Oz com o plano que contém a face $[EFGH]$.

4 **No referencial o.m. *Oxyz* está representada uma pirâmide reta. Sabe-se que:**
- a face $[ABCO]$ está contida no plano coordenado xOy;
- a abcissa de ponto A é 5 e a ordenada do ponto C é 3;
- a altura da pirâmide é 6;
- o ponto V', não representado na figura, é a projeção ortogonal do ponto V sobre o plano xOy.



4.1. Indica as coordenadas do ponto médio de $[OC]$ e uma equação do plano mediador de $[OC]$.

4.2. Representa, por uma equação, o plano mediador do:

a) segmento de reta $[BC]$;

b) segmento de reta $[VV']$;

c) segmento de reta $[V'B]$.

ESPMA10CAP © Porto Editora

5 **Em relação a um referencial o.m. *Oxyz*, considera os pontos $R(1, 3, -2)$ e $S(-4, 2, -3)$ e α o plano mediador de $[RS]$.**

5.1. Sem recorrer à equação do plano α, averigua se o ponto $T\left(-1, -\frac{1}{2}, -2\right)$ pertence a α.

5.2. Mostra que o plano α pode ser definido pela equação $10x + 2y + 2z = -15$.

5.3. Determina as coordenadas do ponto de interseção de $[RS]$ com o plano α.

5.4. Dá exemplo das coordenadas de um ponto de α que tenha ordenada 2.

5.5. Determina as coordenadas do ponto de interseção de α com cada um dos eixos coordenados.

6 **Em relação a um referencial o.m. *Oxyz*, considera os pontos $A(3, 0, -2)$, $B(2, -4, -1)$ e $C(-1, 3, -2)$.**
Representa, através da equação na forma reduzida, a superfície esférica de:

6.1. centro B e raio 3;

6.2. centro A e que passa por B;

6.3. diâmetro $[AC]$.

7 **Indica as coordenadas do centro e o raio da superfície esférica definida pela equação:**

7.1. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

7.2. $(x-3)^2 + y^2 + (z+4)^2 = 8$

7.3. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 25$

7.4. $(x-3)^2 + (y+5)^2 + z^2 = 12$

8 **Em relação a um referencial o.m. *Oxyz*, considera o ponto $C(-2, 3, -1)$.**
Escreve, na forma reduzida, a equação da superfície esférica de centro C e tangente ao plano coordenado:

8.1. xOy **8.2.** xOz

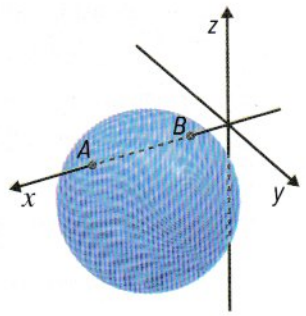
8.3. yOz

9 **Escreve, na forma reduzida, a equação da superfície esférica de centro no ponto de coordenadas $(-3, -4, 2)$ e tangente ao plano definido pela equação:**

9.1. $x = -6$ **9.2.** $y = 2$ **9.3.** $z = 4$

10 **No referencial o.m. $Oxyz$ da figura está representada uma superfície esférica definida pela equação $(x-3)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$. Sabe-se que:**

- A e B são os pontos de interseção da superfície esférica com o eixo Ox;
- a abcissa de A é maior que a abcissa de B.

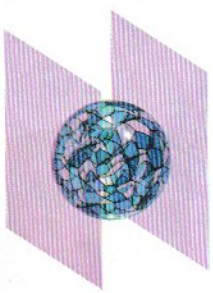


10.1. Representa, por uma equação na forma reduzida, a superfície esférica de diâmetro $[AB]$.

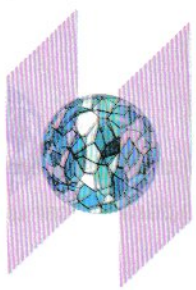
10.2. A superfície esférica dada é tangente ao plano yOz? Justifica

11 **Em relação a um referencial o.m. $Oxyz$, indica as equações dos planos tangentes à superfície esférica definida por $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 16$ e que são:**

11.1. paralelos a yOz;



11.2. paralelos a xOz.



12 **Em relação a um referencial o.m. $Oxyz$, considera a esfera de centro no ponto $C(-2, 4, -3)$ e raio r.**

Determina o valor de r e representa, por uma inequação, na forma reduzida, a esfera tangente ao plano definido pela equação:

12.1. $x = -1$ **12.2.** $y = 2$ **12.3.** $z = -6$

ESPMA10CAP © Porto Editora

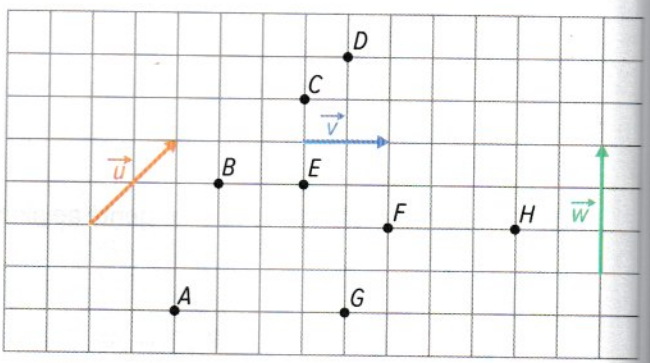
Ficha 1.1. e 1.2.

Vetor no plano e no espaço. Soma de um ponto com um vetor

Deves ter presente que...

- Um **vetor** (livre) é caracterizado pela direção, sentido e comprimento comuns aos segmentos de reta orientados, seus representantes.
- O **vetor nulo** representa-se por $\vec{0}$ e tem como representante qualquer segmento de reta orientado nulo, $[A, A]$, cuja origem coincide com a extremidade.
- A **norma do vetor** $\vec{u}$ representa-se por $\|\vec{u}\|$ e é a medida de comprimento de qualquer segmento de reta orientado que seja representante de $\vec{u}$.
- Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dizem-se **simétricos** quando e só quando têm a mesma direção, sentidos opostos e o mesmo comprimento ($\vec{u} = -\vec{v}$ e $\vec{v} = -\vec{u}$).
- A **soma de um ponto P com um vetor $\vec{u}$** é um ponto Q, tal que $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$.

1 **Sobre uma base quadriculada estão representados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.**



1.1. Utiliza letras da figura para indicar um vetor:

a) com direção e sentido iguais aos de $\vec{v}$;

b) com direção igual à de $\vec{u}$, sentido oposto e metade do comprimento;

c) com direção e sentido iguais ao de $\vec{w}$ e o dobro do comprimento;

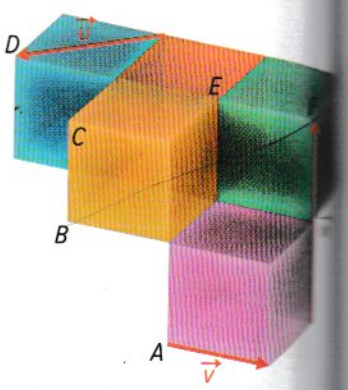
d) simétrico de $\vec{v}$.

1.2. Indica o valor de:

a) $\|\vec{u}\|$ **b)** $\|\vec{v}\|$

c) $\|\vec{w}\|$ **d)** $\|\overrightarrow{GH}\|$

2 **A figura é constituída por cubos geometricamente iguais com 1 unidade de aresta.**



2.1. Utiliza letras da figura para indicar um vetor:

a) simétrico de $\vec{u}$;

b) com a direção e sentido iguais a $\vec{w}$ e metade do comprimento;

c) com a direção de $\vec{v}$, sentido oposto e o triplo do comprimento;

d) com a mesma direção e sentido de $\vec{u}$ e o dobro do comprimento.

2.2. Indica o valor de:

a) $\|\vec{u}\|$

b) $\|\vec{w}\|$

c) $\|\overrightarrow{DG}\|$

d) $\|\overrightarrow{BG}\|$

3 **A figura é constituída por cubos geometricamente iguais. A aresta de cada cubo mede 2 unidades.**

Indica se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações.

3.1. $[E, F]$ é um representante de $\vec{w}$.

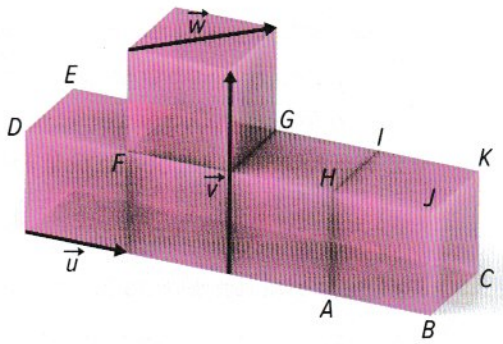
3.2. $[H, K]$ e $[C, A]$ são representantes de vetores simétricos.

3.3. $\overrightarrow{AB}$ é simétrico de $\vec{u}$.

3.4. $\|\vec{u}\| = \|\vec{w}\|$

3.5. A norma do vetor $\vec{v}$ é igual à norma do vetor $\overrightarrow{GK}$.

3.6. $\|\vec{w}\| = \sqrt{8}$

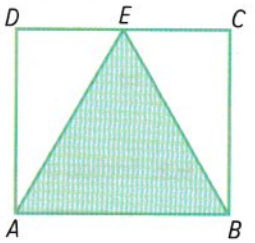


4 **Na figura, $[ABCD]$ é um retângulo e $[ABC]$ é um triângulo equilátero, em que a medida do perímetro é 18.**

Qual das opções representa $\|\overrightarrow{AD}\|$?

(A) 6 **(B)** $2\sqrt{3}$

(C) $2\sqrt{6}$ **(D)** $3\sqrt{3}$



5 **Atendendo aos pontos assinalados na figura, completa os espaços.**

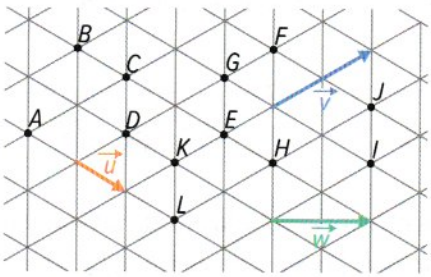
5.1. $C + \vec{w} = \square$

5.2. $C + (-\vec{u}) = \square$

5.3. $H + (-\vec{v}) = \square$

5.4. $\square + \vec{w} = E$

5.5. $\square + \vec{v} = J$



6 **A figura é constituída por dois cubos geometricamente iguais com uma face comum.**

Utiliza letras da figura para completar os espaços.

6.1. $A + \overrightarrow{HJ} = \square$

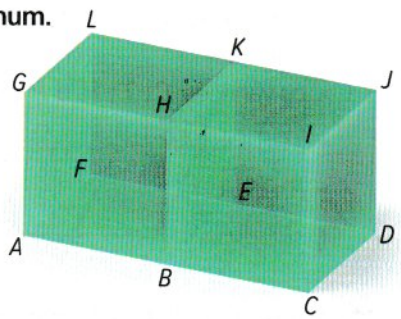
6.2. $E + (-\overrightarrow{AB}) = \square$

6.3. $\square + \overrightarrow{IC} = B$

6.4. $\square + (-\overrightarrow{FE}) = L$

6.5. $L + \overrightarrow{KC} = \square$

6.6. $B + \square = C$



7 **Na figura está representado um prisma octogonal regular.**

7.1. Utiliza letras da figura para completar os espaços.

a) $A + \vec{w} = \square$

b) $\square + \vec{v} = F$

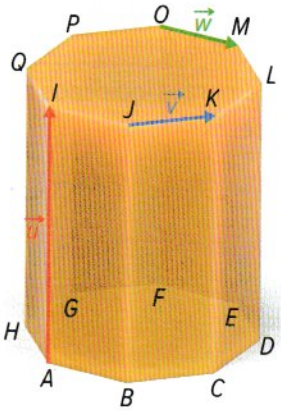
c) $K + (-\vec{u}) = \square$

d) $\square + (-\vec{w}) = A$

7.2. Seleciona a afirmação verdadeira.

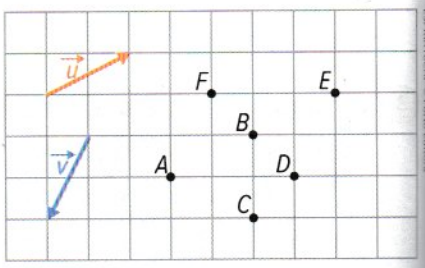
(A) $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{FE}$ **(B)** $\overrightarrow{FG} = -\vec{v}$

(C) $\overrightarrow{MO} = \vec{w}$ **(D)** $\overrightarrow{DM} = \vec{u}$



ESPMA10CAP © Porto Editora

8 **Na figura estão representados dois vetores, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e os pontos A, B, C, D, E e F.**



8.1. A partir da informação dada na figura, indica a imagem do:

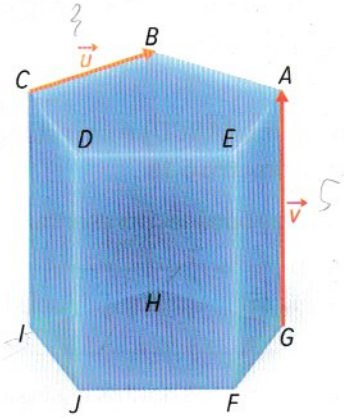
a) ponto E pela translação de vetor $\vec{v}$;

b) ponto B pela translação de vetor $-\vec{u}$;

c) ponto A pela translação de vetor $-\vec{v}$.

8.2. À imagem de C, obtida pela reflexão de eixo AD, aplicou-se a translação de vetor $\vec{u}$. Que ponto se obteve?

9 **Na figura está representado um prisma pentagonal regular.**



9.1. Indica o ponto representado por:

a) $(H-\vec{u})+\vec{v}$

b) $(C-\vec{v})+\vec{u}$

9.2. Indica a imagem do:

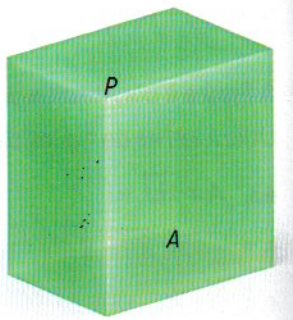
a) ponto J pela translação de vetor $\vec{v}$;

b) ponto B pela translação de vetor $-\vec{u}$.

9.3. Considera $\|\vec{u}\|=3$ e $\|\vec{v}\|=5$. Qual das opções representa $\|\overrightarrow{JE}\|$?

(A) $\sqrt{34}$ **(B)** $\sqrt{15}$ **(C)** 8 **(D)** $\sqrt{8}$

10 **Na figura está representado um paralelepípedo retângulo.**

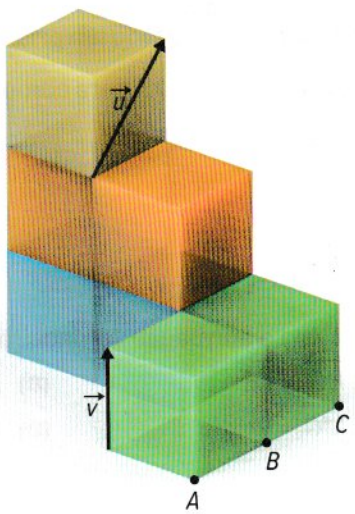


Dois dos vértices estão assinalados pelas letras A e P.

Faz uma distribuição das letras C, R, E, H, M e T pelos restantes vértices, de modo que:

- os vértices C, T, H e P pertençam à mesma face;
- $\|\overrightarrow{CE}\|=\|\overrightarrow{AP}\|$
- $P+\overrightarrow{MA}=T$
- $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AE}$

11 **A figura é constituída por sete cubos de igual aresta.**



Nela estão representados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e os pontos A, B e C.

Utiliza elementos indicados na figura para completar a igualdade.

$$(A+\square)-\square=B$$

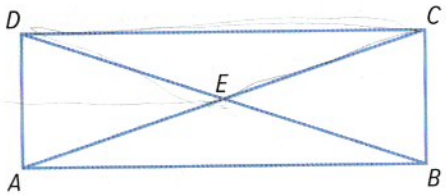
Ficha 1.3. Operações com vetores

Deves ter presente que...

- A **soma dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$** é um vetor que se representa por $\vec{u}+\vec{v}$ e pode obter-se da seguinte forma:
  - na extremidade de um representante de $\vec{u}$, aplica-se um representante de $\vec{v}$;
  - um representante do vetor soma $\vec{u}+\vec{v}$ tem origem na origem do representante de $\vec{u}$ e extremidade na extremidade do representante de $\vec{v}$.
- A **diferença entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$** representa-se por $\vec{u}-\vec{v}$, sendo $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$.
- O vetor $k\vec{u}$, com $k \in \mathbb{R}$, é tal que:
  - se $k=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}$, tem-se $k\vec{u}=\vec{0}$ (e inversamente);
  - se $k>0$, $k\vec{u}$ é um vetor com direção e sentido iguais aos de $\vec{u}$;
  - se $k<0$, $k\vec{u}$ é um vetor com direção igual à de $\vec{u}$ e sentido oposto ao de $\vec{u}$;
  - $\|k\vec{u}\| = |k|\,\|\vec{u}\|$.
- Dois vetores, não nulos, dizem-se **colineares** quando têm a mesma direção.
- Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares, quando e só quando, $\exists k \in \mathbb{R} : \vec{v}=k\vec{u}$.

Nota: Por convenção, o vetor nulo é colinear com qualquer vetor.

1 Na figura, $[ABCD]$ é um retângulo.



Com as letras da figura, indica um representante de:

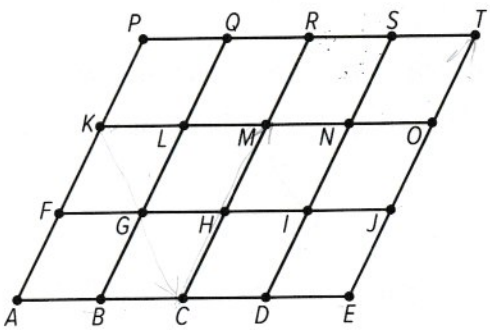
1.1. $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{EC}$

1.2. $\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{CE}$

1.3. $\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AD}$

1.4. $\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}$

2 Utiliza letras da figura para indicar um representante de:



2.1. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GL}$

2.2. $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{SI}$

2.3. $\overrightarrow{JE}+\overrightarrow{RT}$

2.4. $\overrightarrow{HI}+\overrightarrow{PS}$

2.5. $\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{JT}$

2.6. $\overrightarrow{ND}-\overrightarrow{QL}$

2.7. $(\overrightarrow{FL}+\overrightarrow{QM})-\overrightarrow{RT}$

2.8. $\overrightarrow{DI}-(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{AB})$

ESPMA10CAP © Porto Editora

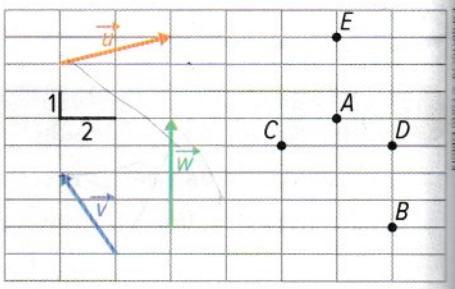
3 **Considera os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e os pontos A, B, C, D e E representados na figura.**

Utiliza letras da figura para indicar um representante do vetor:

3.1. $\vec{u}+\vec{v}$

3.2. $\vec{u}-\vec{w}$

3.3. $\vec{w}-\vec{v}$

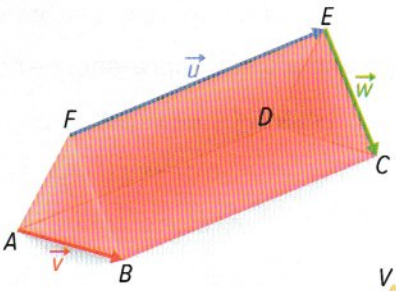


4 **Na figura está representado um prisma triangular regular. Recorre às letras da figura para indicar um representante de:**

4.1. $\vec{v}+\vec{u}$

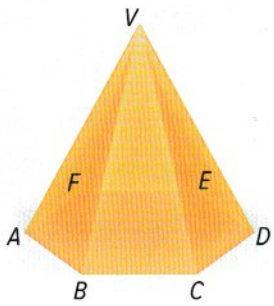
4.2. $\vec{v}-\vec{w}$

4.3. $-\vec{w}+\vec{u}$



5 **Na figura está representada uma pirâmide hexagonal regular.**

Mostra que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}=\vec{0}$.



6 **O paralelogramo $[AETP]$ está decomposto em 12 paralelogramos geometricamente iguais. Completa, utilizando letras da figura.**

6.1. $I-\overrightarrow{TO}=\square$

6.2. $F+\square=P$

6.3. $R-\square=J$

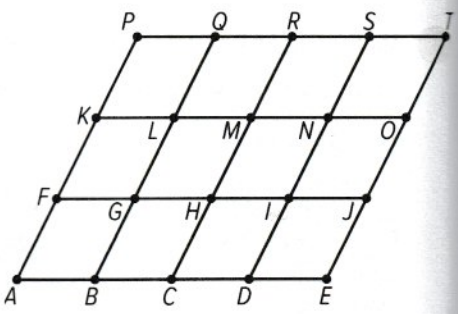
6.4. $\square-\overrightarrow{DS}=B$

6.5. $B+3\square=E$

6.6. $\square+2\overrightarrow{HL}=M$

6.7. $I-\frac{1}{2}\overrightarrow{GS}=\square$

6.8. $J+\frac{1}{3}\square=O$



7 **Na figura estão representados dois vetores, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e os pontos A, B, C, D, E, F, G, H e I.**

7.1. Utilizando letras da figura, dá um exemplo de um representante do vetor:

a) $-\vec{u}$

b) $2\vec{v}$

c) $-2\vec{u}$

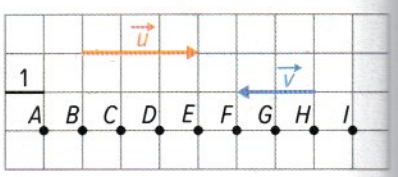
d) $-3\vec{v}$

e) $\frac{4}{3}\vec{u}$

f) $-\frac{5}{2}\vec{v}$

g) $-\frac{5}{3}\vec{u}$

h) $\frac{1}{2}\vec{v}$



7.2. Determina:

a) $\left\|\frac{2}{3}\vec{u}\right\|$

b) $\|-3\vec{v}\|$

c) $\left\|-\frac{1}{2}\vec{u}\right\|$

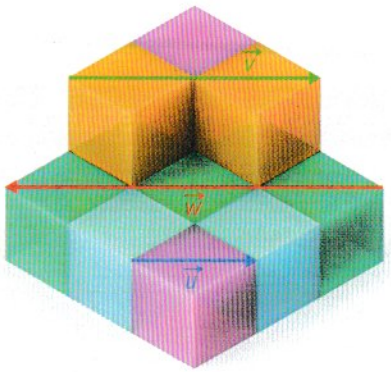
d) $\|\vec{u}+\vec{v}\|$

e) $\|\vec{u}-\vec{v}\|$

f) $\|-\vec{u}+2\vec{v}\|$

8 **A figura é uma composição feita com cubos geometricamente iguais.**

A partir da informação dada na figura, completa as igualdades com um número real.

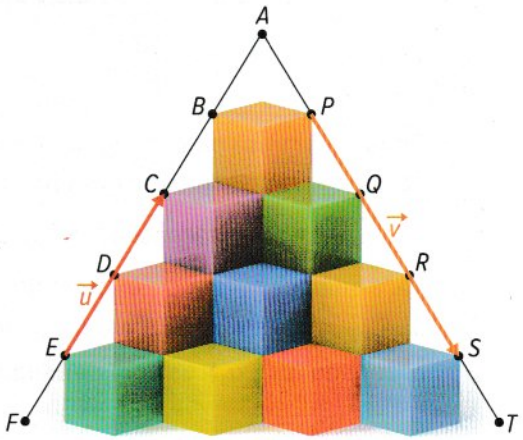


8.1. $\vec{w} = \square\ \vec{u}$

8.2. $\vec{u} = \square\ \vec{v}$

8.3. $\vec{w} = \square\ \vec{v}$

9 **Na figura estão representados dois vetores, $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Sabe-se que pontos assinalados e consecutivos, na mesma reta, estão a igual distância.**



9.1. A partir da informação da figura, dá exemplo de um representante do vetor:

a) $2\vec{u}$ **b)** $-\frac{1}{3}\vec{v}$

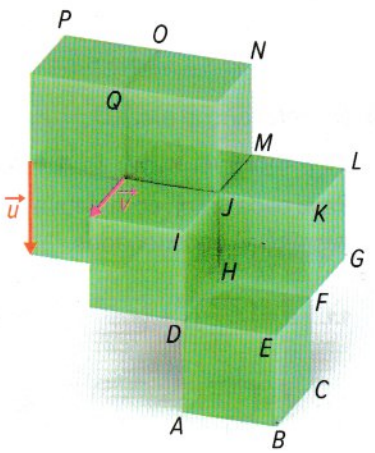
c) $\frac{3}{2}\vec{u}$ **d)** $\frac{5}{3}\vec{v}$

e) $-\frac{5}{2}\vec{u}$ **f)** $\frac{2}{3}\vec{v}$

9.2. Sabendo que $\|\vec{u}\| = \frac{5}{2}$, determina $\|\overrightarrow{AE}\|$.

10 **A figura é constituída por cubos geometricamente iguais.**

Utiliza letras da figura para indicar:



10.1. $\vec{u} + \vec{v}$

10.2. $M + 2\vec{v}$

10.3. $C - 2\vec{u}$

10.4. $\vec{v} - \vec{u}$

10.5. $P + (\overrightarrow{ON} + \vec{v})$

10.6. $\overrightarrow{JL} + \vec{u}$

10.7. $G + (\overrightarrow{LJ} + \vec{v})$

10.8. $\frac{1}{2}\overrightarrow{KC} - \vec{u}$

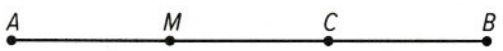
10.9. $N + 2(\vec{v} + \vec{u})$

10.10. $B + (-2\vec{u} + \overrightarrow{KM})$

11 **Na figura está representado um segmento de reta, $[AB]$.**

Sabe-se que:

- os pontos M e C pertencem a $[AB]$;
- M é o ponto médio de $[AC]$;
- $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$



Mostra que $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

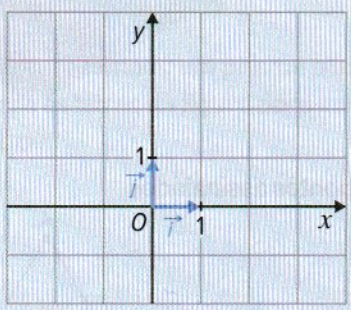
ESPMA10CAP © Porto Editora

Ficha 2.1. Coordenadas de um vetor

Deves ter presente que...

- Referencial ortonormado (o.n.) no plano e no espaço

No plano

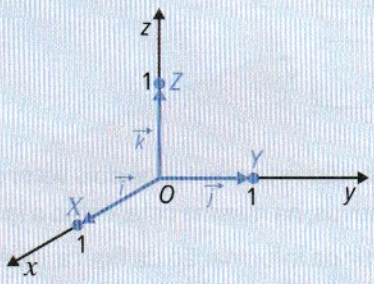


Consideram-se vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$, perpendiculares e de norma 1, aplicados na origem do referencial.

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ é um referencial o.n.

Para qualquer vetor $\vec{u}$, existem números reais u_1 e u_2, tais que $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$, sendo o par ordenado (u_1, u_2) **as coordenadas do vetor** $\vec{u}$.

No espaço



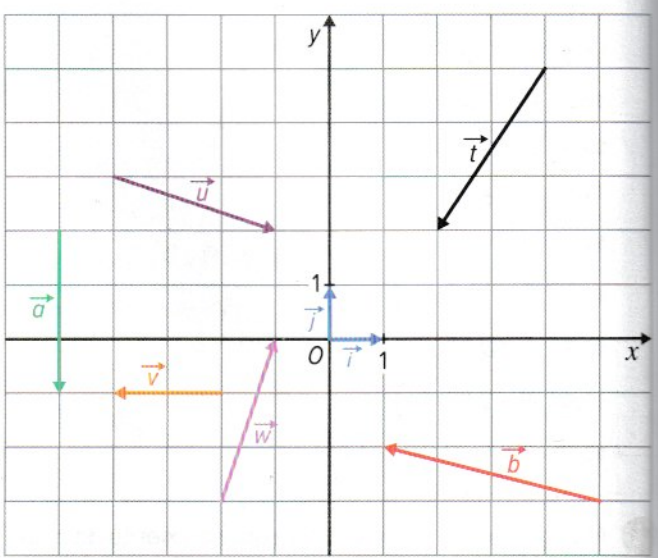
Consideram-se vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, perpendiculares e de norma 1, aplicados na origem do referencial.

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ é um referencial o.n.

Para qualquer vetor $\vec{u}$, existem números reais u_1, u_2 e u_3, tais que $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$, sendo o terno ordenado (u_1, u_2, u_3) **as coordenadas do vetor** $\vec{u}$.

1 No referencial o.n. $(O, \vec{i}, \vec{j})$ estão representados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{t}$, $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Para cada vetor, completa a igualdade e indica as respetivas coordenadas.



1.1. $\vec{u} = \square\,\vec{i} + \square\,\vec{j}$, logo $\vec{u}(\square, \square)$.

1.2. $\vec{v} = \square\,\vec{i} + \square\,\vec{j}$, logo $\vec{v}(\square, \square)$.

1.3. $\vec{w} = \square\,\vec{i} + \square\,\vec{j}$, logo $\vec{w}(\square, \square)$.

1.4. $\vec{t} = \square\,\vec{i} + \square\,\vec{j}$, logo $\vec{t}(\square, \square)$.

1.5. $\vec{a} = \square\,\vec{i} + \square\,\vec{j}$, logo $\vec{a}(\square, \square)$.

1.6. $\vec{b} = \square\,\vec{i} + \square\,\vec{j}$, logo $\vec{b}(\square, \square)$.

2 **No referencial o.n. $(O, \vec{i}, \vec{j})$ estão representados os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.**

Qual destes vetores é representado por:

2.1. $\vec{i}+2\vec{j}$?

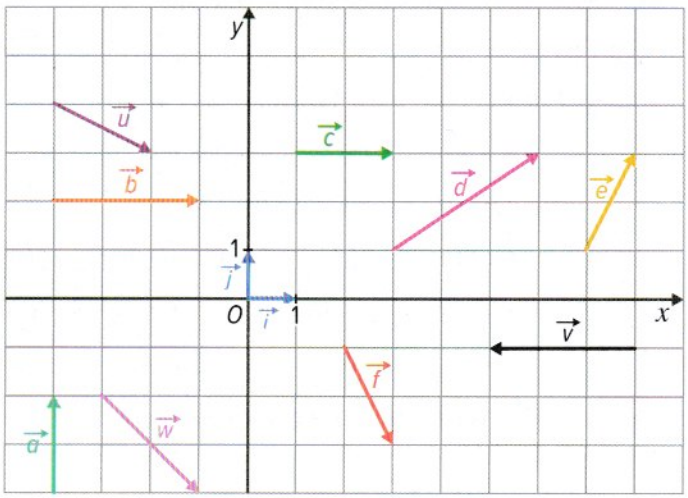
2.2. $2\vec{i}-2\vec{j}$?

2.3. $2\vec{j}$?

2.4. $3\vec{i}+2\vec{j}$?

2.5. pelas coordenadas $(3, 0)$?

2.6. pelas coordenadas $(1, -2)$?

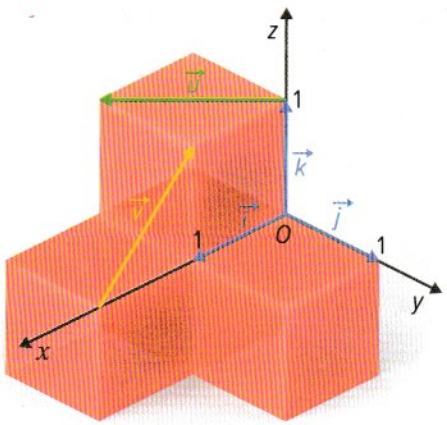


3 **No referencial o.n. $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ estão representados cubos geometricamente iguais e os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.**

Para cada vetor, completa a igualdade e indica as respetivas coordenadas.

3.1. $\vec{u}=\square\vec{i}+\square\vec{j}+\square\vec{k}$; $\vec{u}(\square, \square, \square)$

3.2. $\vec{v}=\square\vec{i}+\square\vec{j}+\square\vec{k}$; $\vec{u}(\square, \square, \square)$



4 **Considera um referencial o.n. $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.**

Faz corresponder cada vetor às respetivas coordenadas.

$\vec{a}=-3\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ $\quad$ $\vec{b}=2\vec{j}-3\vec{k}$ $\quad$ $\vec{c}=-\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ $\quad$ $\vec{d}=2\vec{i}-3\vec{j}$ $\quad$ $\vec{e}=3\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$

$(-1, -3, 1)$ $\quad$ $(-3, 1, -1)$ $\quad$ $(0, 2, -3)$ $\quad$ $(3, -1, 1)$ $\quad$ $(2, -3, 0)$

5 **No referencial o.n. $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ está representado um sólido formado por cubos geometricamente iguais.**

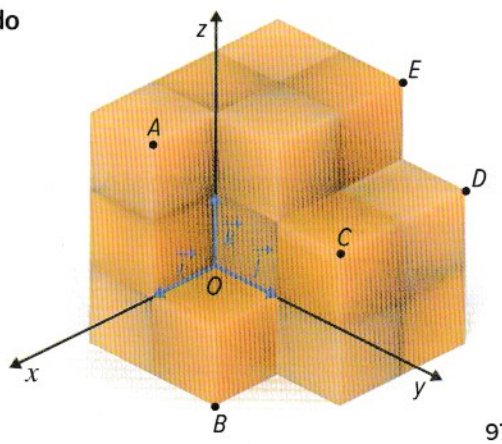
Indica as coordenadas de cada um dos vetores.

5.1. $\overrightarrow{AB}(\square, \square, \square)$

5.2. $\overrightarrow{AE}(\square, \square, \square)$

5.3. $\overrightarrow{BE}(\square, \square, \square)$

5.4. $\overrightarrow{DA}(\square, \square, \square)$



ESPMA10CAP © Porto Editora

Ficha 2.2. Operações com coordenadas de vetores

Deves ter presente que...

- Num referencial o.n. Oxy, sendo $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$:
  - $\vec{u}+\vec{v}=(u_1, u_2)+(v_1, v_2)=(u_1+v_1, u_2+v_2)$
  - $\vec{u}-\vec{v}=(u_1, u_2)-(v_1, v_2)=(u_1-v_1, u_2-v_2)$
  - $k\vec{u}=k(u_1, u_2)=(ku_1, ku_2)$, $k \in \mathbb{R}$
- Num referencial o.n. $Oxyz$, sendo $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$:
  - $\vec{u}+\vec{v}=(u_1, u_2, u_3)+(v_1, v_2, v_3)=(u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)$
  - $\vec{u}-\vec{v}=(u_1, u_2, u_3)-(v_1, v_2, v_3)=(u_1-v_1, u_2-v_2, u_3-v_3)$
  - $k\vec{u}=k(u_1, u_2, u_3)=(ku_1, ku_2, ku_3)$, $k \in \mathbb{R}$

1 Em relação a um referencial o.n. Oxy, sabe-se que:

$\vec{u}(-2, 3)$ $\quad$ $\vec{v}(0, -4)$ $\quad$ $\vec{w}(2, -4)$ $\quad$ $\vec{t}(5, 0)$

Indica as coordenadas do vetor representado por:

1.1. $2\vec{u}$ $\quad$ **1.2.** $\vec{v}-\vec{w}$ $\quad$ **1.3.** $\vec{v}+\vec{t}$

1.4. $\frac{1}{2}\vec{w}+\vec{t}$ $\quad$ **1.5.** $\frac{1}{2}\vec{v}+\vec{w}$ $\quad$ **1.6.** $3\vec{u}+\vec{w}$

2 Em relação a um referencial o.n. $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, considera os vetores:

$\vec{u}(-2, 3, 1)$ $\quad$ $\vec{v}=-2\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$

Determina as coordenadas do vetor:

2.1. $\vec{w}=-\frac{1}{2}\vec{v}+\vec{u}$ $\quad$ **2.2.** $\vec{t}=(2\vec{u}-\vec{v})+2\vec{i}$

3 Em relação a um referencial o.n., qual das opções representa as coordenadas de um vetor colinear com $\vec{u}(-2, 3)$?

(A) $(2, 3)$ $\quad$ **(B)** $(-2, -3)$ $\quad$ **(C)** $(-4, -6)$ $\quad$ **(D)** $(8, -12)$

4 Em relação a um referencial o.n. $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, considera os vetores:

$\vec{u}(-5, 5, 2)$ $\qquad$ $\vec{v}(-2; 2; 0{,}8)$

Mostra que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares.

5 Em relação a um referencial o.n. $Oxyz$, sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores, tais que:

$\vec{u}\left(-6, \frac{3}{2}, -2\right)$ $\qquad$ $\vec{v}(-2, 1, a)$ $\qquad$ $\vec{w}\left(-2, b, -\frac{2}{3}\right)$

5.1. Justifica a afirmação:

"Seja qual for o valor de a, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares."

5.2. Indica um valor de b, de modo que:

a) $\vec{u}$ e $\vec{w}$ não sejam colineares;

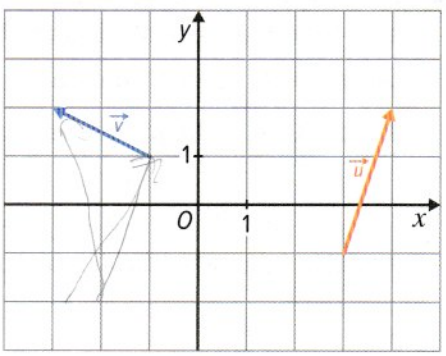
b) $\vec{u}$ e $\vec{w}$ sejam colineares.

6 No referencial o.n. Oxy estão representados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Seja $\vec{w}$ o vetor que satisfaz as condições:

- $\vec{w}$ é colinear com o vetor $\vec{u}+\vec{v}$;
- a soma das coordenadas de $\vec{w}$ é 6.

Determina as coordenadas do vetor $\vec{w}$.



ESPMATOCAP © Porto Editora

Ficha 2.3. e 2.4. Coordenadas do vetor definido por dois pontos e da soma de um ponto com um vetor

Deves ter presente que...

Vetor como diferença entre dois pontos

- **No plano:** Em relação a um referencial o.n. Oxy, sejam $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$.
  $\overrightarrow{AB} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$
- **No espaço:** Em relação a um referencial o.n. $Oxyz$, sejam $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$.
  $\overrightarrow{AB} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

Soma de um ponto A com um vetor $\vec{u}$: $P = A + \vec{u}$

- **No plano:** Em relação a um referencial o.n. Oxy, sejam $A(a_1, a_2)$, $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $P(x, y)$.
  $(x, y) = (a_1 + u_1, a_2 + u_2)$
- **No espaço:** Em relação a um referencial o.n. $Oxyz$, sejam $A(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $P(x, y, z)$.
  $(x, y, z) = (a_1 + u_1, a_2 + u_2, a_3 + u_3)$

1 Considera os pontos $P(-2, 7)$, $T(2, -5)$ e $R(-4, 0)$, e os vetores $\vec{u}(-1, 2)$ e $\vec{v}(3, 1)$, representados num referencial o.n. Oxy.

1.1. Determina as coordenadas do vetor:

a) $\overrightarrow{PT}$

b) $\overrightarrow{RT}$

c) $\vec{v} - \overrightarrow{PR}$

d) $2\vec{u} + \overrightarrow{TR}$

2 Em relação a um referencial o.n. Oxy, sabe-se que as coordenadas do ponto P são $(-2, 3)$, A é um ponto do eixo Ox e B é um ponto do eixo Oy.

Determina as coordenadas do:

2.1. ponto A, sabendo que as coordenadas de $\overrightarrow{PA}$ são $(4, -3)$;

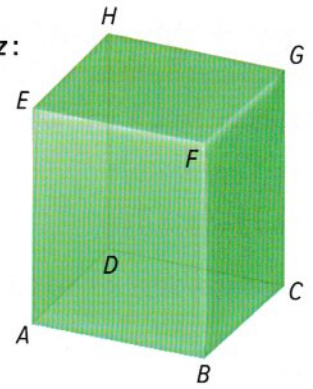
2.2. ponto B, sabendo que as coordenadas de $\overrightarrow{PB}$ são $(2, 1)$;

2.3. ponto C, sabendo que as coordenadas de $\overrightarrow{PC}$ são $(-1, 5)$.

3 **Na figura está representado um prisma e, em relação a um referencial o.n. *Oxyz*:**

$A(-2, -2, 0)$, $D(-2, 2, 0)$ e $E(-2, -2, 5)$

Determina as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{AE}$ e $\overrightarrow{DE}$.

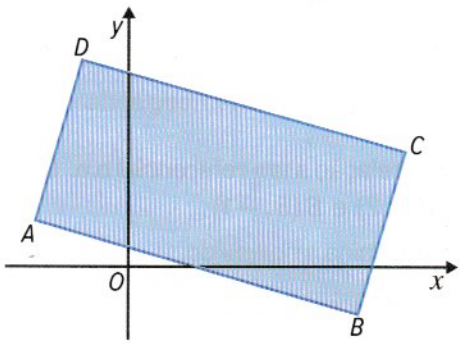


4 **No referencial o.n. *Oxy* está representado um retângulo [*ABCD*].**

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(-2, 1)$;
- o ponto B tem coordenadas $(5, -1)$;
- o vetor $\overrightarrow{AD}$ tem coordenadas $\left(1, \frac{7}{2}\right)$.

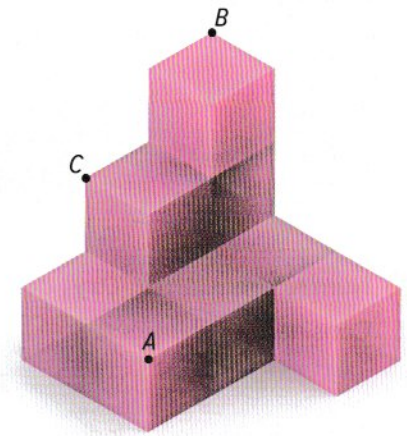
Determina as coordenadas dos vértices C e D.



5 **Em relação a um referencial o.n. *Oxyz*, os pontos A, B e C, representados na figura, formada por cubos geometricamente iguais, têm as seguintes coordenadas:**

$A(2, 1, 0)$, $B(-1, -1, 2)$ e $C(1, -1, 1)$

Mostra que $P + \overrightarrow{BC} = A$, sendo P o ponto de coordenadas $(0, 1, 1)$.

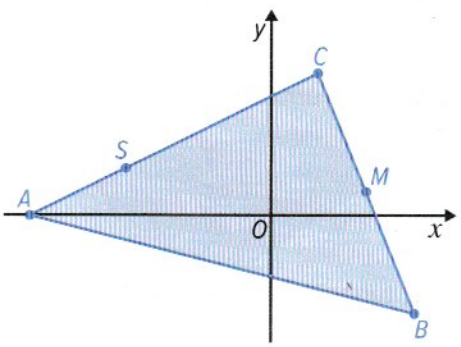


6 **No referencial o.n. *Oxy* está representado um triângulo [*ABC*].**

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(-5, 0)$;
- o ponto B tem coordenadas $(3, -2)$;
- M é o ponto médio de $[BC]$ e tem coordenadas $\left(2, \frac{1}{2}\right)$;
- o ponto S é tal que $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Determina as coordenadas do vetor $\overrightarrow{SM}$.



ESPMA10CAP © Porto Editora

Ficha 2.5. Norma de um vetor a partir das coordenadas

Deves ter presente que...

No plano: Seja k um número real e $\vec{u}(u_1, u_2)$ um vetor representado num referencial o.n. Oxy.

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$
- $\|k\vec{u}\| = |k| \, \|\vec{u}\|$

No espaço: Seja k um número real e $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ um vetor representado num referencial o.n. $Oxyz$.

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$
- $\|k\vec{u}\| = |k| \, \|\vec{u}\|$

1 **Em relação a um referencial o.n. Oxy, considera os vetores $\vec{u}(-2, 1)$ e $\vec{v}(3, -2)$ e os pontos $A(4, 2)$ e $B(5, -1)$.**

Determina a norma do:

1.1. vetor $\vec{u}$

1.2. vetor $\vec{v}$

1.3. vetor $\overrightarrow{AB}$

2 **Num referencial o.n. Oxy, considera o ponto $A(2, -1)$ e P um ponto do eixo Oy.**

Considera as equações:

I: $\|\overrightarrow{AP}\| = 2$ **II:** $\|\overrightarrow{PA}\| = \sqrt{3}$ **III:** $\|\overrightarrow{AP}\| = \sqrt{8}$

Das equações dadas, indica uma que:

2.1. seja impossível e justifica a tua escolha;

2.2. tenha uma só solução e determina-a;

2.3. tenha duas soluções e determina-as.

3 **Num referencial o.n. Oxy, considera os vetores $\vec{u}(-3, 4)$ e $\vec{v}(2, 1)$.**

Determina as coordenadas de um vetor $\vec{w}$ se:

3.1. $\vec{w}$ é colinear com $\vec{u}$, tem igual sentido e norma igual a 2;

3.2. $\vec{w}$ é colinear com $\vec{v}$, tem sentido oposto e norma igual a $\sqrt{10}$.

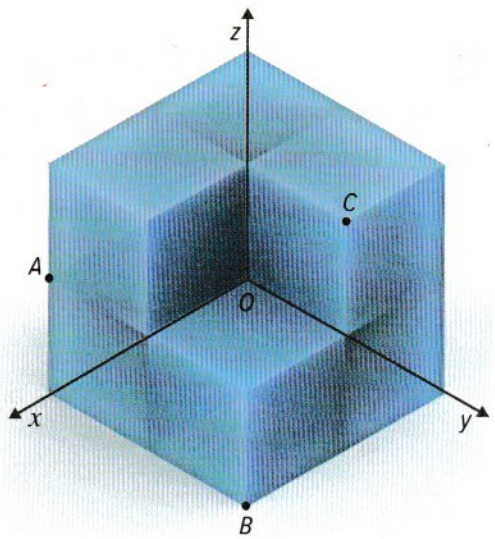
4 **No referencial o.n. $Oxyz$ está representada uma figura constituída por sete cubos geometricamente iguais. Sabe-se que 1 é a medida da aresta de cada cubo.**

4.1. Considera os pontos A, B e C representados e indica as suas coordenadas.

a) $A(\square, \square, \square)$

b) $B(\square, \square, \square)$

c) $C(\square, \square, \square)$



4.2. Determina a norma do vetor:

a) $\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{AC}$

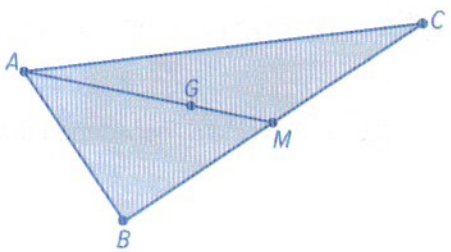
c) $\overrightarrow{BC}$

5 **Na figura está representado um triângulo $[ABC]$.**

Em relação a um referencial o.n. Oxy, sabe-se que:

- M é o ponto médio de $[BC]$;
- G é o baricentro do triângulo;
- as coordenadas dos vértices são $A(-2, 1)$, $B(0, -2)$ e $C(6, 2)$.

Determina $\|\overrightarrow{AG}\|$ e as coordenadas de G.



ESPMA10CAP © Porto Editora

Ficha 2.6. Equação vetorial da reta

Deves ter presente que...

- **No plano**

Uma **equação vetorial da reta** que passa no ponto $A(x_0, y_0)$ e tem a direção do vetor $\vec{u}(u_1, u_2)$ num referencial o.n. Oxy é:

$$P = A + k\vec{u},\ k \in \mathbb{R}$$

- **No espaço**

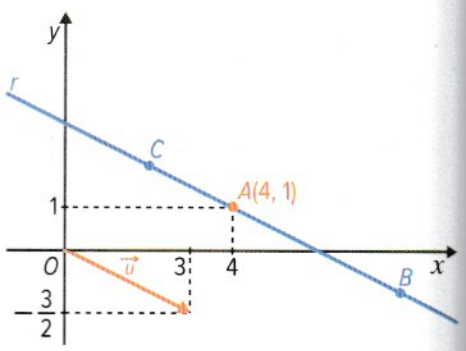
Uma **equação vetorial da reta** que passa no ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ e tem a direção do vetor $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ num referencial o.n. $Oxyz$ é:

$$P = A + k\vec{u},\ k \in \mathbb{R}$$

1 **No referencial o.n. Oxy está representada a reta r que passa em $A(4, 1)$ e tem a direção do vetor $\vec{u}\left(3, -\frac{3}{2}\right)$.**

1.1. Os pontos $B(8, -1)$ e $C(2, 2)$ pertencem à reta r.
Determina um número real k, de modo que:

a) $B = A + k\vec{u}$



b) $C = A + k\vec{u}$

1.2. O ponto $D(-1, 3)$ pertence à reta r? Justifica.

2 **Considera a reta s definida pela equação vetorial:**

$$(x, y) = (-1, 2) + k(3, 1),\ k \in \mathbb{R}$$

2.1. Determina as coordenadas do ponto da reta s que tem abcissa 4.

2.2. Determina as coordenadas do ponto de interseção da reta s com o eixo Ox.

3 **Num referencial o.n. Oxy, considera a reta r definida pela equação vetorial $(x, y) = (-1, 2) + k(2, 2)$, $k \in \mathbb{R}$.**

A reta r interseta Ox no ponto A e Oy no ponto B.

Define, através de uma equação vetorial, a reta que passa por O (origem) e M, sendo M o ponto médio de $[AB]$.

4 **Num referencial o.n. $Oxyz$, considera os pontos $A(-1, 2, 3)$ e $B(2, 0, -4)$.**

4.1. Dá exemplo de um vetor com a direção da reta AB e determina as suas coordenadas.

4.2. Representa a reta AB através de uma equação vetorial.

5 **Num referencial o.n. $Oxyz$, considera o ponto $A(1, -2, -1)$ e a reta r definida pela equação vetorial $(x, y, z) = (2, 1, 0) + k(3, -1, 1)$, $k \in \mathbb{R}$.**

5.1. Representa, por uma equação vetorial, a reta s que passa em A e é paralela a r.

5.2. Determina as coordenadas do ponto de interseção de r com o plano xOz.

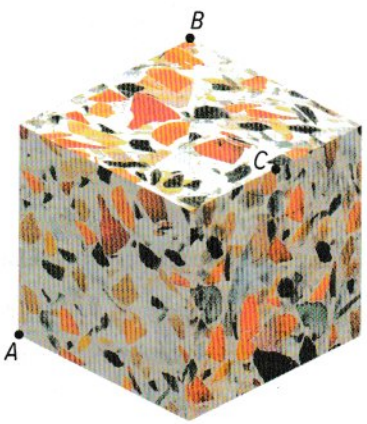
6 **Na figura está representado um cubo e nele assinalados os pontos A, B e C.**

Em relação a um referencial o.n. $Oxyz$, tem-se:

$$A(0, -3, 4),\ B(4, -3, 0) \text{ e } C(2, 1, 4)$$

Seja M o ponto médio de $[AC]$ e T o ponto de interseção da reta BM com o plano definido pela equação $z = 3$.

Determina as coordenadas do ponto T.



ESPMA10CAP © Porto Editora

Ficha 2.7.

Equação reduzida da reta (no plano)

Deves ter presente que...

- **No plano**: Uma **equação reduzida** de uma reta, não vertical, é do tipo:

$$y = mx + b,\ m \in \mathbb{R} \text{ e } b \in \mathbb{R}.$$

m: declive da reta; ***b***: ordenada na origem

- Se $\vec{u}(u_1, u_2)$ é um vetor diretor da reta não vertical, então $m = \frac{u_2}{u_1}$.
- Se m é o declive da reta, então o vetor de coordenadas $(1, m)$ é paralelo à reta.
- No plano, retas não verticais são paralelas quando e só quando têm igual declive.

1 Num referencial o.n. Oxy, considera a reta definida por uma equação vetorial e, para cada caso, indica o declive da reta e dá exemplo de um ponto que lhe pertença.

1.1. $(x, y) = (3, -4) + k(1, -3),\ k \in \mathbb{R}$

1.2. $(x, y) = (0, -5) + k(3, 6),\ k \in \mathbb{R}$

1.3. $(x, y) = \left(-1, \frac{1}{2}\right) + k\left(-2, \frac{1}{3}\right),\ k \in \mathbb{R}$

2 Num referencial o.n. Oxy, considera a reta definida pela equação reduzida e, para cada caso, indica as coordenadas de um ponto da reta e as coordenadas de um vetor diretor da reta.

2.1. $y = 2x - 3$

2.2. $y = -5x + 7$

2.3. $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{3}$

3 Em relação a um referencial o.n. Oxy, considera as retas r e s definidas por:

$$r: y = -4x + 2 \qquad s: (x, y) = (1, 3) + k(-2, 4),\ k \in \mathbb{R}$$

3.1. Representa a reta r através de uma equação vetorial.

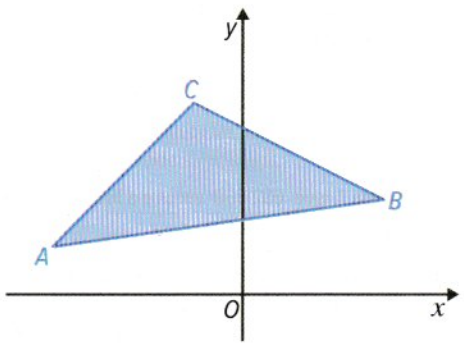
3.2. Representa a reta s através de uma equação na forma reduzida.

4 **Num referencial o.n. Oxy, a reta r é definida pela equação $y=\frac{2}{3}x-1$.**
As coordenadas de um vetor diretor da reta r podem ser:

(A) $(2, 3)$ **(B)** $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ **(C)** $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ **(D)** $\left(1, -\frac{2}{3}\right)$

5 **No referencial o.n. Oxy está representado um triângulo $[ABC]$.**

Sabe-se que:
- a reta AC é definida pela equação $y=x+5$;
- a reta BC é definida pela equação $(x, y)=(1, 3)+k(-2, 1)$, $k\in\mathbb{R}$.

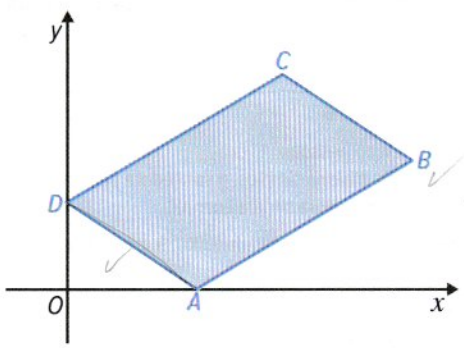


5.1. Representa, na forma reduzida, a reta t que passa na origem e é paralela à reta AC.

5.2. Determina as coordenadas do vértice C.

6 **No referencial o.n. Oxy está representado um paralelogramo $[ABCD]$.**

Sabe-se que:
- o ponto B tem coordenadas $(8, 3)$;
- a reta AD é definida pela equação $y=-\frac{2}{3}x+2$.



6.1. Determina as coordenadas dos vértices A, C e D.

6.2. Representa, por uma equação vetorial, a reta CA.

7 **Num referencial o.n. Oxy, o declive de uma reta não paralela a qualquer um dos eixos coordenados é representado por m, sendo a ordenada na origem igual ao inverso do declive.**

Mostra que essa reta interseta o eixo Ox no ponto de abcissa $-\frac{1}{m^2}$.

ESPMA10CAP © Porto Editora